Отчёт для конкурса "Молодая математика России" за 2020 год

Волков Юрий Владимирович

15 декабря 2020 г.

1 Результаты

В 2020 году я изучал скобку Герстенхабера на когомологиях Хохшильда и их обобщениях. В первой половине года я вместе с С. Визерспун исследовал скобку Герстенхабера на производной алгебре единицы достаточно хорошей точной моноидальной категории, и мы смогли получить некоторые интересные результаты, о которых рассказано ниже. Эти результаты можно найти в препринте [1]. Во второй половине года я изучал поведение скобки Герстенхабера относительно стабильных эквивалентностей Морита типа. Известно, что когомологии Хохшильда инвариантны относительно этих эквивалентностей как градуированная ассоциативная алгебра (кроме некоторых особенностей в градуировке 0), а для симметрических алгебр было доказано кроме того, что скобка Герстенхабера сохраняется при соответствующем изоморфизме. Тем не менее для других классов алгебр это открытый вопрос. Удалось придумать новые подходы к этому вопросу и практически завершено доказательство для всех конечнмерных алгебр, но пока остаются некоторые технические пробелы. Заделыванию этих пробелов и написанию статьи по соответствующему результату я планирую посвятить следующий год.

Когомологии Хохшильда — тонкий производный инвариант ассоциативных алгебр и его исследование является частью моего проекта. Если посмотреть на них с более широкой точки зрения, то когомологии Хохшильда — это производная алгебра единицы категории бимодулей над данной алгеброй, рассматриваемой как точная моноидальная категория. В то же время существуют другие точные моноидальные категории, обладающие похожими свойствами (например, модули над алгеброй Хопфа) и изучение производных алгебр единиц этих категорий тоже вызывает интерес. Одной из самых интересных структур на когомологиях

Хохшильда является скобка Герстенхабера, эта структура менее понятна, чем кап произведение, а потому её вычисление, доказательство фактов о ней и обобщение на другие конструкции вызывает большие сложности. Изначально скобка Герстенхабера была определена в терминах бар резольвенты (которой может просто не быть в произвольной точной монаидальной категории), позже в статье Ш. Шведэ появилась её интерпретация в терминах длинных точных последовательностей. Недавно появились также интерпретации скобки Герстенхабера в терминах произвольной проективной бимодульной резольвенты. Первая статья про это была написана К. Негроном и С. Визерспун, позже она была обобщена мной (в этой статье появилось понятие гомотопического подъёма), а ещё позже эта интерпретация была применена К. Негроном, мной и С. Визерспун, чтобы обобщить результат Дж. Сташева и показать, что скобка Герстенхабера может быть интепретирована как коммутатор A_∞-кодифференцирований произвольной бимодульной резольвенты.

Используя понятие гомотопического подъёма, введённого в моей работе, мы с С. Визерспун обобщили конструкцию скобки Герстенхабера на производную алгебру единицы точной моноидальной категории, в которой единица имеет достаточно плоскую проективную резольвенту. Резюмируя нашу конструкцию, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 1. *Если единица точной моноидальной категории имеет проективную резольвенту P такую, что $P^{\otimes n}$ является (не обязательно проективной) резольвентой единицы для любого $n \geq 0$, то существует диагональное отображение $\Delta_P : P \to P \otimes P$, и для любого коцикла $f : P \to 1$ существует гомотопичяеский подъём $\phi_P : P \to P$ для (f, Δ_P). При этом операция, определённая равенством $[f, g] = f\phi_g - (-1)^{(|f|-1)(|g|-1)} g\phi_f$, индуцирует корректно определённую скобку на производной алгебре единицы , которая не зависит от выбора P и Δ_P. При этом производная алгебра единицы вместе с кап произведением и этой скобкой является алгеброй Герстенхабера.*

Р. Херманн ранее вводил скобку Герстенхабера на производной алгебре единицы достаточно хорошей точной моноидальной категории с помощью длинных точных последовательностей и конструкции Ш. Шведэ. Тем не менее, с помощью этой конструкции ему не удалось доказать практически никаких свойств скобки. Даже билинейность её осталась под вопросом, не говоря уже о том, задаёт ли она структуру алгебры Герстенхабера. В своей работе мы показали, что, если единица точной монаидальной категории обладает проективной резольвентой и при этом категория удовлетворяет условиям, требуемым для конструкции Р. Херманна, то наша конструкция даёт ту же операцию, что и конструкция

Р. Херманна по модулю знака. Таким образом, мы доказали, что, если единица имеет проективную резольвенту, то построенная Р. Херманном скобка задаёт структуру алгебры Герстенхабера на производной алгебре единицы.

Кроме указанных выше результатов, вышла онлайн статья [2], написанная в первый год реализации проекта.

2 Статьи

[1] Y. Volkov, S. Witherspoon *Graded Lie structure on cohomology of some exact monoidal categories*, arXiv:2004.06225.
[2] Y. Volkov, *Anticommutative Engel algebras of the first five levels*, Linear and Multilinear Algebra, DOI: 10.1080/03081087.2020.1715333.

3 Конференции

В 2020 году докладов на конференциях не делал.

4 Педагогическая деятельность

Преподаю на Факультете Математики и Компьютерных Наук. В первой половине 2020 года вёл практические занятия по алгебре на первом курсе бакалавриата, семинар "Гомотопическая алгебра" для студентов 3-4 курсов бакалавриата и семинар "Спектральные последовательности" для студентов 1 курса магистратуры. Во второй половине года вёл практические занятия по алгебре у 1 и 2 курсов бакалавриата.