ОТЧЁТ ДЛЯ КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2019 ГОД.

ВОЛКОВ ЮРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

1. Результаты

В первой половине 2019 года я в основном изучал действия сферических твистов на триангулированных категориях. Про это были написаны две статьи: одна моя личная и одна совместно с моей студенткой А. Нордсковой. Ещё две статьи были написаны мной про вырождения алгебр, но это не относится к теме проекта. Во второй половине года я изучал когомологии Хохшильда и скобку Герстенхабера. По этой теме пока статей нет, хотя уже практически готовы результаты о связи формулы для скобки Герстенхабера в терминах произвольной резольвенты (т.е. через так называемые гомотопические поъёмы) и её интерпретации в терминах коротких точных последовательностей и о инвариантности скобки Герстенхабера относительно стабильных эквивалентностей Морита типа. Первый результат, в частности, позволит применять технику гомотопических подъёмов к производной алгебре эндоморфизмов единицы точной моноидальной категории богатой проективными объектами. Завершение доказательства и написание этих результатов я планирую осуществить в следующем году, соответственно подробный рассказ о них может оказаться в моём следующем отчёте.

Одной из целей данного проекта было описание производных групп Пикара самоинъективных алгебр конечного типа представления. Важным шагом для этого описание является доказательство точности действия групп кос на триангулированных категориях твистами вдоль 0-сферических объектов. Именно этому шагу были посвящены основные работы, написанный мной в этом году. Сферические твисты были впервые введены П. Зайделем и Р. Томасом в контексте изучения гомологической зеркальной симметрии Концевича и с тех пор нашли множество применений в алгебраической геометрии и не только. В этой же статье была доказана точность действия группы кос типа A на производной категории для n-сферических объектов с $n > 1$. Позже в работе А. Ефимова этот результат был обобщен на случай сферических последовательностей длины k и сферичности $n > 2k - 1$. Для 2-сферических объектов и конфигурации любого Дынкинского типа точность действия была доказана К. Бравом и Х. Томасом чисто алгебраически, с использовании разложения Гарсайда. Позже этот результат был обобщен на произвольную сферичность > 1 для производной категории алгебры Гинзбурга в работе Ю. Киу и Дж. Вульфа. В то же время в работе Зайделя и Томаса показано, что уже действие группы кос, соответствующее конфигурации A_3, может быть неточным для 1-сферических объектов.

В совместной работе с А. Нордсковой мы применили методы, основанные на статье К. Брава и Х. Томаса для доказательства точности действия группы кос твистами вдоль сферических объектов, образующих конфигурацию типа ADE, сферичность которых не равна 1. Напомним, что m-сферический объект в триангулированной категории $\mathcal{T}$ над полем k с конечномерными Hom-ами — это объект E, производная алгебра эндоморфизмов $\mathrm{Hom}^*(E,E) = \oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E,E[i])$ которого изоморфна как градуированная k-алгебра алгебре $R = k[t]/(t^2)$, где переменная t имеет градуировку m, и при этом для любого $X \in \mathcal{T}$ отображение $\mathrm{Hom}^*(X,E) \times \mathrm{Hom}^*(E,X) \to k$, переводящее (f,g) в $\pi(f\circ g)$, где $\pi : R \to R/\langle 1_R\rangle \cong k$ — каноническая проекция, является невырожденным спариванием. Если $\mathcal{T}$ достаточно хороша (например, является алгебраической триангулированной категорией), то имеются функторы производного Hom-а $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,-) : \mathcal{T} \to \mathrm{D}k$ и левого сопряжённого к нему тензорного произведения $E \otimes - : \mathrm{D}k \to \mathcal{T}$, где $\mathrm{D}k$ обозначает производную категорию k-линейных пространств. Тогда конус коединицы $E \otimes \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E,-) \xrightarrow{ev} \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}$ этого сопряжения даёт автоэквивалентность T_E категории $\mathcal{T}$. Сферические объекты $E_1,\ldots,E_n$ образуют конфигурацию типа Γ, где Γ — граф с вершинами $1,\ldots,n$, если $\mathrm{Hom}^*(E_i,E_j) = 0$ для $i \neq j$, если i и j не соеденины, и $\dim_k \mathrm{Hom}^*(E_i,E_j) = 1$, если i и j соединены ребром. Известно, что существует гомоморфизм Φ из обобщённой группы кос типа Γ в $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, переводящий σ_i в T_{E_i}. Напомним, что обобббщённая группа кос типа Γ — это группа с образующими $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$ и соотношениями $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ для i,j не соединённых ребром и $\sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j$ для i,j соединённых ребром. Главный вопрос, который здесь возникает: является ли Φ мономорфизмом? В своей работе мы утвердительно ответили на этот вопрос для ряда интересных случаев.

Теорема 1. *Гомоморфизм Φ инъективен, если сферичность объектов $E_1,\ldots,E_n$ не равна 1 и граф Γ является диаграммой Дынкина типов ADE.*

Основным местом, где в доказательстве используется дынкиновость графа Γ, является тот факт, что для обобщённых групп кос типа Дынкина инъективность гомоморфизма можно проверять не для самой группы кос, а для индуцированного гомоморфизма из моноида кос, то есть моноида с теми же образующими и соотношениями. Случай сферичности > 1 решился после подходящей (хотя и не очевидной) трансформацией доказательства Брава и Томаса. При этом после этой трансформации доказательство в сферичности 2 становится совсем коротким. Случай неположительной сферичности, наиболее важный для вычисления производных групп Пикара, оказался несколько сложнее. Его доказательство использовало две непростые техники. Во-первых, было использовано обобщение понятия двучленного комплекса на триангулированные категории с фиксированной конфигурацией сферических объектов. Были доказаны некоторые их свойства, а потом применены для выполнения первого шага доказательства. Второй шаг доказательства был связан с работой исключительно с обобщёнными группами кос и заключался в построении критерия, когда данное слово в моноиде кос может быть записано с левым фактором отличным от изначального. Этот критерий, использующий стабильные колчаны с переносом и их мэш-категорию, интересен сам по себе. Результат, полученный мной и А. Нордсовой, позволяет найти подгруппу, изоморфную группе кос типа D_n, в производной группе Пикара симметрической алгебры древесного типа D_n частоты 1. Есть основания полагать, что вместе со сдвигом и обычной группой Пикара эта подгруппа порождает всю производную группу Пикара соответствующей алгебры.

Обобщением понятия сферического объекта является сферическая последовательность. Сферическая последовательность длины 1 и сферичночти m — это просто m-сферический объект. Сферическая последовательность длины $r > 1$ и сферичности m — это последовательность объектов $E^1, \ldots, E^r$ такая, что $\mathrm{Hom}^*(E^i, E^i) \cong k$, $\mathrm{Hom}^*(E^i, E^{i+1}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E^i, E^{i+1}[m_i]) \cong k$, $\mathrm{Hom}^*(E^i, E^j) = 0$, если $j \neq i, i+1$ (все индексы по модулю r), $\sum\limits_{i=1}^{r} m_i = m$, и для любого $X \in \mathcal{T}$ отображение $\mathrm{Hom}^*(X, E^{i+1}) \times \mathrm{Hom}^*(E_i, X) \to k$, переводящее (f, g) в $f \circ g \in \mathrm{Hom}^*(E^i, E^{i+1}) = k$, является невырожденным спариванием. Если Hom-ы в $\mathcal{T}$ конечномерны, то для двух сферических последовательностей $E^1, \ldots, E^r$ и $F^1, \ldots, F^s$ сферичностей m и n соответственно либо $\frac{m}{r} = \frac{n}{s}$, либо $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, F_j) = 0$ для всех i, j. Можно определить сферический твист T_E вдоль $E = (E^1, \ldots, E^r)$ как конус естественного преобразования $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i \otimes \mathbb{R}\mathrm{Hom}(E_i, -) \xrightarrow{ev} \mathrm{Id}_{\mathcal{T}}$. Если E — сферическая последовательность, то T_E — автоэквивалентность категории $\mathcal{T}$. Напомним, что обобщённые группы кос B_{A_2}, B_{B_2} и B_{G_2} — это группы с двумя образующими σ_1 и σ_2 и соотношением $\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$, $(\sigma_1\sigma_2)^2 = (\sigma_2\sigma_1)^2$ и $(\sigma_1\sigma_2)^3 = (\sigma_2\sigma_1)^3$ соответственно. Если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(E_i, F_j) = 0$ для всех i, j, то T_E и T_F коммутируют и то, какую группу они порождают, сильно зависит от всей категории $\mathcal{T}$ (а не только от категории, порождённой E и F). Если $E_i \ncong F_j[l]$ для некоторых i, j, l, то $T_E = T_F$ и они порождают циклическую группу. Основной результат, доказанный в моей работе, — это следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E и F — сферические последовательности как выше такие, что $\mathrm{Hom}^*(E_i, F_j) \neq 0$ для некоторых i, j и $E_i \ncong F_j[l]$ для всех i, j, l. Будем полагать, что $s \geq r$.*

(1) *Пусть $r = s$, $m = n$ и $\dim_k \mathrm{Hom}^*(\bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i, \bigoplus\limits_{j=1}^{s} F_j) = r$.*

- *Если $3m \neq 4r$ и $(m, r) \neq (2, 3)$, то группа, порождённая T_E и T_F, изоморфна B_{A_2}.*

- *Если* $3m = 4r$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна факторгруппе группы* B_{A_2} *по циклической подгруппе, порождённой элементом* $(\sigma_1\sigma_2)^{3t\frac{r}{\text{НОД}(r,3)}}$ *для некоторого* $t \in \mathbb{Z}$.
- *Если* $m = 2$, $r = 3$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна либо группе* B_{A_2}, *либо нетривиальному центральному расширению симметрической группы* S_3 *бесконечной циклической группой.*

(2) *Пусть* $s = 2r$, $n = 2m$ *и* $\dim_k \mathrm{Hom}^*(\bigoplus_{i=1}^{r} E_i, \bigoplus_{j=1}^{s} F_j) = 2r$.

- *Если* $2m \neq 3r$ *и* $(m, r) \neq (1, 2)$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна* B_{B_2}.
- *Если* $2m = 3r$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна факторгруппе группы* B_{B_2} *по циклической подгруппе, порождённой элементом* $(\sigma_1\sigma_2)^{2t\frac{2r}{\text{НОД}(r-2,4)}}$ *для некоторого* $t \in \mathbb{Z}$.
- *Если* $m = 1$ *и* $r = 2$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна либо группе* B_{B_2}, *либо группе* $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/(2t, -2t)$ *для некоторого* $t \in \mathbb{Z}$.

(3) *Пусть* $s = 3r$, $n = 3m$ *и* $\dim_k \mathrm{Hom}^*(\bigoplus_{i=1}^{r} E_i, \bigoplus_{j=1}^{s} F_j) = 3r$.

- *Если* $3m \neq 5r$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна* B_{G_2}.
- *Если* $3m = 5r$, *то группа, порождённая* T_E *и* T_F, *изоморфна факторгруппе группы* B_{G_2} *по циклической подгруппе, порождённой элементом* $(\sigma_1\sigma_2)^{3tr}$ *для некоторого* $t \in \mathbb{Z}$.

(4) *Во всех оставшихся случаях* T_E *и* T_F *порождают свободную группу на двух образующих.*

Данная теорема была применена для вычисления производной группы Пикара самоинъективных алгебр типа D_4 с кручением порядка 3. Кроме того, в статье были приведены примеры категорий, в которых для двух сферических последовательностей E и F возникают нетривиальное центральное расширение симметрической группы S_3 бесконечной циклической группой и группа $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(2t, -2t)$, учавствующие в формулировке теоремы, то есть когда ядро отображения из соотвествующей обобщённой группы кос в $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, заданного последовательностями E и F, не лежит в центре. Эти примеры весьма необычны и на мой взгляд имеют природу схожую с контрпримером П. Зайделя и Р. Томаса в случае сферичности 1.

2. Статьи

(1) Y. Volkov, *Groups generated by two twists along spherical sequences*, arXiv:1901.10904.
(2) Y. Volkov, *Anticommutative Engel algebras of the first five levels*, arXiv:1909.08157.
(3) Y. Volkov, *n-ary algebras of the first level*, arXiv:1910.10200.

(4) A. Nordskova, Y. Volkov, *Faithful actions of braid groups by twists along ADE-configurations of spherical objects*, arXiv:1910.02401.

3. Конференции

Доклады:

(1) "Graded center and generalized Reynolds ideals", конференция "Homotopy meets homology", Дублин, Ирландия, 27–31 мая 2019.
(2) "Actions generated by spherical twists on triangulated categories. I", 1st Joint Meeting Brazil-France in Mathematics, Рио-де-Жанейро, Бразилия, 14–19 июля 2019.
(3) "Actions generated by spherical twists on triangulated categories. II", Conference of collaborators of IME-USP in representations of algebras and related topics, Сан-Паулу, Бразилия, 22–24 июля 2019.

Являлся одним из организаторов конференции "Homological algebra, ring theory and Hochschild cohomology", посвящённой 70-летию Александра Ивановича Генералова, прошедшей 28–30 октября в Санкт-Петербурге, Россия. Организаторы: М. Антипов, Н. Вавилов, Ю. Волков, М. Всемирнов, И. Зильберборд.

4. Педагогическая деятельность

Преподаю на бакалавриате "Математика" и в магистратуре "Современная математика" СПбГУ. В первой половине 2019 года вёл практические занятия по алгебре на втором курсе бакалавриата, во второй — практические занятия по алгебре на первом курсе бакалавриата и спецкурс и спецсеминар "Гомологическая алгебра" на первом курсе магистратуры.

Под моим руководством студент бакалавриата "Математика" СПбГУ Нордскова Анна Владимировна защитила дипломную работу на тему "Точность действия групп кос, заданных ADE конфигурациями сферических объектов, и производные группы Пикара самоинъективных алгебр конечного типа представления".