

Отчёт для конкурса "Молодая математика России" за 2021 год

Волков Юрий Владимирович

14 декабря 2021 г.

1 Результаты

В 2021 году я изучал поведение скобки Герстенхабера на когомологиях Хохшильда относительно стабильных эквивалентностей. Известно, что для двух производно эквивалентных алгебр когомологии Хохшильда изоморфны. Б. Келлером было доказано, что этот изоморфизм можно построить так, что он будет изоморфизмом алгебр Герстенхабера. Стабильные эквивалентности в некотором смысле являются более широким классом эквивалентностей, чем производные (для многих классов алгебр производная эквивалентность индуцирует стабильную эквивалентность Морита типа). Если рассматривать произвольные стабильные эквивалентности, то сложно сказать что-то о поведении скобки Герстенхабера на когомология Хохшильда, так как уже сами когомологии Хохшильда стабильно эквивалентных алгебр могут быть не изоморфны, более того, совсем не ясно, какова связь между ними. По этой причине я ограничился рассмотрением стабильных эквивалентностей Морита типа между конечномерными алгебрами. Для таких эквивалентностей в работе Ч. Кси было показано, что они сохраняют положительные группы когомологий Хохшильда. На самом деле в работе Ч. Кси рассматривались стабильные эквивалентности сопряжённого типа, но в работе Р. Мартинез-Виллы и А. Дугаса было показано, что для конечномерных алгебр стабильные эквивалентности Морита типа индуцируют стабильные эквивалентности сопряжённого типа. Известно (и не очень сложно понять из работы Ч. Кси), что на самом деле этот изоморфизм индуцируется гомоморфизмом между алгебрами когомологий Хохшильда, который биективен во всех степенях кроме, возможно, нулевой.

Аналогичный результат известен о гомологиях Хохшильда: группы гомологий Хохшильда алгебр, между которыми существует стабильная

эквивалентность Морита типа, изоморфны в положительных степенях. Одним из способов доказать это является применение следов Боука, которые определены изначально в терминах бар резольвент. Определив аналоги следов Бока для когомологий, С. Кёниг, Ю. Лиу и Г. Жоу смогли показать, что в случае стабильной эквивалентности Морита типа между симметрическими алгебрами гомоморфизм между алгебрами когомологий Хохшильда, индуцирующий изоморфизмы в положительных степенях, является гомоморфизмом алгебр Герстенхабера. Вопрос о том, верно ли это для произвольных алгебр, остаётся открытым.

Моя идея заключается в том, чтобы определить следы Боука в терминах произвольных проективных бимодульных резольвент, а потом применить их для доказательства того, что скобка Герстенхабера на когомологиях Хохшильда сохраняется гомоморфизмом, индуцированным стабильной эквивалентностью Морита типа. Это видится возможным, поскольку сравнительно недавно в работах К. Негрона, С. Визерспун и автора данного отчёта появилось описание скобки в терминах произвольной резольвенты. Это позволяет выписать конкретное равенство, которое надо проверить для доказательства инвариантности скобки Герстенхабера относительно стабильных эквивалентностей Морита типа. Я уверен, что требуемое равенство выполняется, но на данном этапе работ у меня не получилось написать его чёткого доказательства. По этой причине работа над соответствующей статьёй пока находится в процессе.

Кроме того, в отчётный год вышла онлайн статья [1], написанная в первый год реализации проекта.

2 Статьи

[1] Y. Volkov *n-ary algebras of the first level*, Mediterranean Journal of Mathematics, 19 (2), 2022, DOI: 10.1007/s00009-021-01894-3.

3 Конференции

В 2021 году докладов на конференциях не делал.

4 Педагогическая деятельность

Преподаю на Факультете Математики и Компьютерных Наук. В первой половине 2021 года вёл практические занятия по алгебре на 1 курсе бакалавриата, лекции и семинар "Гомологическая алгебра" для студентов 3-4

курсов бакалавриата и 1 курса магистратуры. Во второй половине года вёл практические занятия по дискретной математике на 1 курса бакалавриата, семинар "Спектральные последовательности" для студентов 4 курса бакалавриата и 1-2 курсов магистратуры, лекции и семинар "Гомологическая алгебра" для студентов 3-4 курсов бакалавриата и 1-2 курсов магистратуры.

5 Итоги за три года

В рамках проекта планировалось:

1. Найти связь между формулами для скобки Герстенхабера на когомологиях Хохшильда через гомотопические подъёмы, полученными участником конкурса, и интерпретацией скобки Герстенхабера в терминах длинных точных последовательностей, полученной в работе С. Шведе.
2. Построить с помощью характеристического гомоморфизма новые структуры на когомологиях Хохшильда инвариантные относительно производных эквивалентностей.
3. Продолжить изучение связи между производной группой Пикара алгебры и её смэш произведением с группой. Применить полученные результаты для вычисления производной группы Пикара самоинъективных алгебр конечного типа представления.
4. Получить новые результаты о точности действия групп кос, соответствующих конфигурациям сферических объектов, образующих диаграммы Дынкина, на производных категориях.

В некотором смысле первый и последний вопросы были решены полностью.

В 2020 году был написан препринт
Y. Volkov, S. Witherspoon *Graded Lie structure on cohomology of some exact monoidal categories*, arXiv:2004.06225,
устанавливающий связь между определением скобки Герстенхабера через длинные точные последовательности, найденным С. Шведе, и определением через гомотопические подъёмы, полученным мной. Более того, эту связь удалось перенести на произвольные моноидальные категории, что позволило пролить свет на скобку на производной алгебре эндоморфизмов моноидальной единицы, введённую Р. Херманном.

В 2019 году был написан препринт
A. Nordskova, Y. Volkov, *Faithful actions of braid groups by twists along ADE-configurations of spherical objects*, arXiv:1910.02401,
в котором было доказано, что действие группы кос, соответствующее конфигурации сферических объектов типов ADE, точно, если сферичность объектов не равна один. В случае сферичности один известны контрпримеры для некоторых конфигураций, потому это можно считать полным решением вопроса. С другой стороны, остаются побочные вопросы, такие как расширение результатов на случай сферических последовательностей и то, для каких именно конфигураций точность может быть нарушена в сферичности один. С моей точки зрения, последний вопрос является частным случаем первого в том смысле, что техники, работающие со сферическими последовательностями вместо сферических объектов позволяют лучше понять, почему именно нарушается точность. В этом смысле первым шагом к решению вопросов, продолжающих четвёртую часть моего проекта, является препринт
Y. Volkov, *Groups generated by two twists along spherical sequences*, arXiv:1901.10904,
в котором вопрос про действия, соответствующие сферическим последовательностям, полностью решён для случая двух сферических последовательностей.

К третьему вопросу вплотную подступиться не получилось, хотя упомянутые только что результаты о точности действия групп кос были применены моей ученицей А. Нордсковой для вычисления производной группы Пикара самоинъективных алгебр древесного типа D_n . В своей магистерской работе она полностью вычислила эту группу для случая частоты один без кручения. Техника смэш произведений нужна для переноса этого результата на случай произвольной частоты и, возможно, нетривиального кручения. Хотя случай кручения порядка три (который возникает только для D_4) был решён в последней упомянутой работе с помощью рассмотрения сферических последовательностей (образующих конфигурацию G_2) вместо сферических объектов.

Второй вопрос в том виде, в котором он был сформулирован в плане, не рассматривался, хотя в последний год рассматривались вопросы аналогичной природы (связанные с инвариантностью когомологий Хохшильда), о чём написано в начале данного отчёта.