Отчет по конкурсу «Молодая математика России» за 2019 год

Зотов Андрей Владимирович

1. Результаты, полученные в этом году

Интегрируемые тригонометрические волчки Эйлера-Арнольда

Рассматривался специальный класс тригонометрических $\mathrm{GL}(N)$ R-матриц со спектральным параметром, удовлетворяющих не только квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$R_{12}^{\hbar}(z_{12})R_{13}^{\hbar}(z_{13})R_{23}^{\hbar}(z_{23}) = R_{23}^{\hbar}(z_{23})R_{13}^{\hbar}(z_{13})R_{12}^{\hbar}(z_{12})\,, \quad z_{ab} = z_a - z_b\,, \tag{1.1}$$

но и квадратичному соотношению

$$R_{12}^{\hbar_1}(z_{12})R_{23}^{\hbar_2}(z_{23}) = R_{13}^{\hbar_2}(z_{13})R_{12}^{\hbar_1-\hbar_2}(z_{12}) + R_{23}^{\hbar_2-\hbar_1}(z_{23})R_{13}^{\hbar_1}(z_{13})\,, \tag{1.2}$$

известному как ассоциативное уравнение Янга-Бакстера. Для $N = 2$ этот класс включает широко известные 6-вершинунную XXZ R-матрицу и ее 7-ми вершинную деформацию.

По каждому решению ассоциативного уравнения Янга-Бакстера построена интегрируемая система типа волчка Эйлера-Арнольда

$$\dot{S} = [S, J(S)]\,, \qquad S \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})\,, \tag{1.3}$$

то есть линейный оператор $J(S)$ для интегрируемой модели строится явно по данным R-матрицы.

Получены пуассоновы структуры Склянина, тензоры инерции, гамильтонианы и пары Лакса со спектральным параметром. В частном случае описанные волчки калибровочно эквивалентны тригонометрическим моделям Калоджеро-Сазерленда и Русенаарса-Шнайдера. Получены явные формулы замены переменных. Это означает, что для некоторого случая тензора инерции $J(S)$ и собственных значений матрицы S (отвечающих рангу 1) существует замена переменных вида[1]

$$S_{ij}(p,q) = \frac{(-1)^j \sigma_j(q) e^{(i-1)\eta}}{N} \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{p_n/c}}{\prod\limits_{k:k\neq n} (e^{-\bar{q}_n} - e^{-\bar{q}_k})} \left(e^{-(i-1)\bar{q}_n} + \frac{(-1)^N \delta_{iN}}{e^{N\eta - \bar{q}_n}} \right)\,, \tag{1.4}$$

переводящая уравнение Эйлера (1.3) в уравнения движения релятивистской многочастичной системы с гамильтонианом Руйсенарса-Шнайдера

$$H^{\mathrm{RS}} = \sum_{j=1}^{N} e^{p_j/c} \prod_{k\neq j}^{N} \frac{\sinh\left(\frac{q_j - q_k - \eta}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{q_j - q_k}{2}\right)} \tag{1.5}$$

[1] Здесь $\sigma_j(q)$ – элементарные симметрические функции от $e^{\bar{q}_j}$, а $\bar{q}_j = q_j - (1/N)\sum_k q_k$ – координаты в системе центра масс.

или (в нерелятивистском пределе) в систему Калоджеро-Сазерлена с гамильтонианом

$$H^{\mathrm{CS}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j}^{N} \frac{\nu^2}{\sinh^2\left(\frac{q_j - q_k}{2}\right)} \,. \tag{1.6}$$

Указанные замены переменных появляются вследствие существования формул факторизации для представлений Ласка в многочастичных интегрируемых системах. Упомянутые калибровочные преобразования, генерирующие переход от систем волчков к системам частиц, имеют с алгебраической точки зрения интерпретацию классического аналога твиста Дринфельда, а с геометрической – модификации $\mathrm{GL}(N,\mathbb{C})$-расслоения над нодально вырожденной эллиптической кривой. Этим вопросам посвящена отдельная публикация.

Взаимодействующие интегрируемые волчки Эйлера-Арнольда

Был построен новый класс gl_{NM} интегрируемых систем с гамильтонианами вида

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{M} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{M} H^{\mathrm{top}}(\mathcal{S}^{ii}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j:\, i\neq j}^{M} \mathcal{U}(\mathcal{S}^{ij}, \mathcal{S}^{ji}, q_i - q_j) \,, \tag{1.7}$$

где $\mathcal{S}^{ij} \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$ – набор из M^2 матриц $N \times N$, которые описывают динамические переменные. Такие системы представляют собой промежуточное звено между интегрируемыми волчками (1.3) с гамильтонианом

$$H^{\mathrm{top}}(\mathcal{S}) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{S} J(\mathcal{S})) \,, \tag{1.8}$$

который возникает из (1.7) при $M = 1$, и спиновой моделью Калоджеро-Мозера-Сазерленда

$$H^{\mathrm{spin\,CMS}} = \sum_{i=1}^{M} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i<j}^{M} \frac{S_{ij} S_{ji}}{\sinh^2\left(\frac{q_j - q_k}{2}\right)} \,, \tag{1.9}$$

соответствующей $N = 1$ случаю в (1.7).

Получены уравнения движения и представления Лакса со спектральным параметром. Как и для тригонометрических волчков, ответы вычислены в терминах данных R-матриц, удовлетворяющих уравнениям Янга-Бакстера (1.1)-(1.2). Тем самым охватывается широкий класс моделей.

В частном случае, когда все матричные переменные $\mathcal{S}^{ij}$ имеют ранг 1, гамильтониан (1.7) может быть записан в форме системы взаимодействующих волчков

$$\mathcal{H}^{\mathrm{tops}} = \sum_{i=1}^{M} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{M} H^{\mathrm{top}}(\mathcal{S}^{ii}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j:\, i\neq j}^{M} \mathcal{V}(\mathcal{S}^{ii}, \mathcal{S}^{jj}, q_i - q_j) \,. \tag{1.10}$$

С точки зрения механики такая модель описывает M волчков Эйлера-Арнольда вида (1.3), (1.8) с матричными переменными $\mathcal{S}^{ii} \in \mathrm{Mat}(N,\mathbb{C})$, а также с импульсом p_i и координатой q_i. Каждый волчок имеет собственную внутреннюю динамику и взаимодействует с другими через потенциал $\mathcal{V}(\mathcal{S}^{ii}, \mathcal{S}^{jj}, q_i - q_j)$, который также вычисляется явно. Если потенциал $\mathcal{U}(\mathcal{S}^{ij}, \mathcal{S}^{jj}, q_i - q_j)$ строится по R-матрице $R_{12}^z(q)$, то $\mathcal{V}(\mathcal{S}^{ii}, \mathcal{S}^{jj}, q_i - q_j)$ получается аналогичным образом из ее преобразования Фурье: $R_{12}^z(q) \to R_{12}^z(q) P_{12}$, где P_{12} – оператор перестановки тензорных компонент пространств 1 и 2.

Функция Кронекера и R-матрицы на суперсимметричных эллиптических кривых

В теории интегрируемых систем большую роль играет тождество Фэя рода 1

$$\phi(\hbar_1, z_{12})\phi(\hbar_2, z_{23}) + \phi(-\hbar_2, z_{31})\phi(\hbar_1 - \hbar_2, z_{12}) + \phi(\hbar_2 - \hbar_1, z_{23})\phi(-\hbar_1, z_{31}) = 0 \tag{1.11}$$

на функкцию Кронекера ана эллиптической кривой Σ_τ с модулем τ

$$\phi(\hbar, z; \tau) \equiv \phi(\hbar, z) = \frac{\vartheta'(0)\vartheta(\hbar + z)}{\vartheta(\hbar)\vartheta(z)}\,, \tag{1.12}$$

заданную через тета-функцию

$$\vartheta(z; \tau) \equiv \vartheta(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi\imath\tau(k + \frac{1}{2})^2 + 2\pi\imath(z + \frac{1}{2})(k + \frac{1}{2})\right)\,. \tag{1.13}$$

В важности функций этого класса фугкций мы убедились выше, так как ассоциативное уравнение Янга-Бакстера (1.2) есть не что иное, как матричная версия тождества (1.11) – переписанное специальным образом тождество Римана (теорема сложения).

В этом году удалось построить аналог функции (1.12) на суперсимметричной эллиптической кривой. На ней используются грассмановы переменные ζ_k, μ, ω – суперпартнеры спектральных параметров z_k, постоянной Планка $\hbar$ и модуля эллиптической кривой τ соответственно:

$$\zeta_k^2 = \mu_i^2 = \omega^2 = 0\,, \quad [\zeta_k, \zeta_l]_+ = [\zeta_k, \mu_i]_+ = [\mu_i, \mu_j]_+ = [\zeta_k, \omega]_+ = [\omega, \mu_i]_+ = 0\,. \tag{1.14}$$

Показано, что нечетная функция

$$\begin{gathered}\mathbf{\Phi}(\hbar, z_1, z_2; \tau|\, \mu, \zeta_1, \zeta_2; \omega) \equiv \mathbf{\Phi}^{\hbar|\,\mu}(z_1, z_2|\, \zeta_1, \zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)\phi(\hbar, z_{12}) + \\ +\omega\partial_1\phi(\hbar, z_{12}) + 2\pi\imath\zeta_1\zeta_2\omega\partial_\tau\phi(\hbar, z_{12}) + \zeta_1\zeta_2\mu\partial_1\phi(\hbar, z_{12}) + \frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)\mu\omega\partial_1^2\phi(\hbar, z_{12})\,,\end{gathered} \tag{1.15}$$

где

$$\partial_1\phi(x, y) = \partial_x\phi(x, y)\,, \quad \partial_2\phi(x, y) = \partial_y\phi(x, y) \tag{1.16}$$

удовлетворяет следующему аналогу тождества (1.11):

$$\begin{gathered}\mathbf{\Phi}^{\hbar_1|\,\mu_1}(z_1, z_2|\, \zeta_1, \zeta_2)\mathbf{\Phi}^{\hbar_2|\,\mu_2}(z_2, z_3|\, \zeta_2, \zeta_3) + \mathbf{\Phi}^{-\hbar_2|\,-\mu_2}(z_3, z_1|\, \zeta_3, \zeta_1)\mathbf{\Phi}^{\hbar_1-\hbar_2|\,\mu_1-\mu_2}(z_1, z_2|\, \zeta_1, \zeta_2) \\ +\mathbf{\Phi}^{\hbar_2-\hbar_1|\,\mu_2-\mu_1}(z_2, z_3|\, \zeta_2, \zeta_3)\mathbf{\Phi}^{-\hbar_1|\,-\mu_1}(z_3, z_1|\, \zeta_3, \zeta_1) = 0\,,\end{gathered} \tag{1.17}$$

а также суперсимметричной версии уравнения теплопроводности

$$\Big(\partial_\omega + 2\pi\imath(\zeta_1 + \zeta_2)\partial_\tau\Big)\mathbf{\Phi}^{\hbar|\,\mu}(z_1, z_2|\, \zeta_1, \zeta_2) = \Big(\partial_{\zeta_1} + \zeta_1\partial_{z_1} - \frac{1}{2}\mu\partial_\hbar\Big)\partial_\hbar\mathbf{\Phi}^{\hbar|\,\mu}(z_1, z_2|\, \zeta_1, \zeta_2)\,. \tag{1.18}$$

Используя эти свойства можно построить нечетный суперсимметричный аналог элиптических R-матриц Бакстера-Белавина-Дринфельда, удовлетворяющих суперсимметричной версии уравнения (1.2)

$$\mathbf{R}_{12}^{\hbar_1|\,\mu_1}\mathbf{R}_{23}^{\hbar_2|\,\mu_2} + \mathbf{R}_{31}^{-\hbar_2|\,-\mu_2}\mathbf{R}_{12}^{\hbar_1-\hbar_2|\,\mu_1-\mu_2} + \mathbf{R}_{23}^{\hbar_2-\hbar_1|\,\mu_2-\mu_1}\mathbf{R}_{31}^{-\hbar_1|\,-\mu_1} = 0\,, \tag{1.19}$$

где $\mathbf{R}^{\hbar|\,\mu}_{ab} = \mathbf{R}^{\hbar|\,\mu}_{ab}(z_a, z_b|\,\zeta_a, \zeta_b)$. Этот результат можно интерпретировать, как описание нового представления алгебры Фомина-Кириллова типа A_2.

Был исследован анзац общего вида для нечетного обобщения эллиптической функции Кронекера на суперсимметричных эллиптических кривых. Основным требованием к анзацу являлось выполнения условия (тождества) Фэя рода 1. Полученный ответ содержит пять параметров с одной единственной связью. В случае добавления к тождеству Фэя еще одного условия – выполнения суперсимметричного аналога уравнения теплопроводности, возникают дополнительные связи на параметры анзаца, которые все эти параметры фиксируют с точностью до общего множителя. Используя полученную нечетную функцию Кронекера, строится нечетный же аналог эллиптической R-матрицы. Показано, что она удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера. Кроме того, получено кубическое условие на R-матрицу, имющее вид квантового уравнения Янга-Бакстера с дополнительным слагаемым.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы

1. T. Krasnov, A. Zotov, *Trigonometric integrable tops from solutions of associative Yang-Baxter equation*, Annales Henri Poincare 20:8 (2019) 2671-2697

   https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00023-019-00815-1

2. A. Grekov, I. Sechin, A. Zotov, *Generalized model of interacting integrable tops*, JHEP 10 (2019) 081

   https://link.springer.com/article/10.1007%2FJHEP10%282019%29081

3. M. Vasilyev, A. Zotov, *On factorized Lax pairs for classical many-body integrable systems*, Reviews in Mathematical Physics, 31:6 (2019) 1930002, 45 pp

   https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0129055X19300024

Препринты arXiv, отправленные в журналы, но еще не опубликованные

4. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Odd supersymmetric Kronecker elliptic function and Yang-Baxter equations*, arXiv:1910.01814 [math-ph].

5. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Odd supersymmetrization of elliptic R-matrices*, arXiv:1910.05712 [math-ph].

6. M. Vasilyev, A. Zabrodin, A. Zotov, *Quantum-classical duality for Gaudin magnets with boundary*, arXiv:1911.11792 [math-ph].

3. Участие в конференциях и школах

1. доклад «Ассоциативные уравнения Янга-Бакстера и классические интегрируемые системы», Заседание Московского математического общества, МГУ, г. Москва, 23 апреля 2019 г.

2. доклад «Interacting integrable tops and long-range spin chains», международная конференция «2nd Workshop on Integrable Systems and Applications», Center for Geometry and Physics, Institute for Basic Science, Pohang University of Science and Technology (POSTECH), г. Поханг, Южная Корея, 6-8 мая 2019 г.

3. доклад «Interacting integrable tops from associative Yang-Baxter equation», конференция «Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference», Khazar University, Department of Mathematics, Baku, Azerbaijan, 10-14 June 2019.

4. доклад «Quantum R-matrices in classical integrable systems», международная конференция «Interaction Between Algebraic Geometry and QFT», МФТИ, г. Долгопрудный, 24-28 июня 2019 г.

5. доклад «Quantum-classical dualities in integrable systems», University of Szeged, 09 October 2019, Szeged, Hungary.

6. доклад «Quantum-classical dualities in integrable systems», семинар в Wigner Research Centre for Physics, г. Будапешт, Венгрия, 11 октября 2019 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах

сотрудник: Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН)

сотрудник: «Международная лаборатория теории представлений и математической физики» в НИУ ВШЭ

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

сорукводитель семинара «Методы классических и квантовых интегрируемых систем», Научно-образовательный центр при МИАН, весенний и осенний семестры;

профессор МФТИ, курс «Тоерия групп и представлений» для 2-ого курса, весенний семестр; курс «Введение в квантовые группы» для 3-ого курса, весенний семестр, «Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля» в ИТЭФе;

научное руководство: 5 студентов МФТИ, 2 студента ВШЭ, 2 аспиранта ВШЭ, 1 аспирант ИТЭФ;

ассоциированный сотрудник: Институт теоретической и математической физики в МГУ имени М.В. Ломоносова.