Отчет по конкурсу «Молодая математика России» за 2021 год

Зотов Андрей Владимирович

1. Результаты, полученные в этом году:

1.1. Обобщение параболических расслоений Хиггса, интегрируемость и вещественные структуры

Большой класс интегрируемых систем классической механики может быть описан в виде систем Хитчина, то есть систем, реализованных на модулях голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений (с комплексной группой Ли $G^{\mathbb{C}}$) над комплексной кривой $\Sigma_{g,n}$ (рода g с n проколотыми точками). Пространство модулей играет роль конфигурационного пространства (описывающего, например, координаты частиц в моделях типа Калоджеро-Мозера), а кокасательное расслоение к нему есть тогда фазовое пространство. В общем случае указанный класс систем содержит и спиновые степени свободы, а точнее – их классические аналоги, которые описываются переменными на орбитах коприсоединенного действия. Спиновые переменные – вычеты матрицы Лакса в проколотых точках, рассматриваемой как сечение расслоения Хиггса E над кривой с локальной координатой – спектральным параметром z. С точки зрения гамильтоновой редукции из множества расслоений к их пространству модулей (редукция по калибровочной группе) орбиты коприсоединенного действия в отмеченных точках описываются в виде фактор пространств $G^{\mathbb{C}}/B$, где $B \subset G^{\mathbb{C}}$ – борелевская подгруппа. Это предполагает наличие квази-параболической структуры в отмеченных точках. По этой причине общие системы Хитчина связаны с пространством модулей $G^{\mathbb{C}}$-расслоений Хиггса с квази-параболическими структурами.

Вышеуказанная конструкция систем Хитчина относится к комплексным интегрируемым системам. **Основной целью** работы, проведенной в рамках проекта, является обобщение конструкции на вещественный случай. Оно предполагает описание вещественных структур в расслоениях Хиггса с указанием редукций к вещественным переменным, включая спиновые переменные, которые теперь будут элементами вещественных симметрических пространств.

Рассотрим максимальную компактную подгруппу C в $G^{\mathbb{C}}$ (и ее вещественную форму $G^{\mathbb{R}}$). Например, для $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ максимально компактной подгруппой является $\mathrm{SU}(N)$, а $G^{\mathbb{R}}$ – есть $\mathrm{SL}(N,\mathbb{R})$. Подгруппы C и $G^{\mathbb{R}}$ являются множеством неподвижных точек коммутирующих антиголоморфных инволютивных автоморфизмов ρ и σ, действующих на $G^{\mathbb{C}}$:

$$\rho(C) = C\,, \quad \sigma(G^{\mathbb{R}}) = G^{\mathbb{R}}\,.$$

Пусть U максимальная компактная подгруппа в $G^{\mathbb{R}}$:

$$U = \{g \in G^{\mathbb{R}} \,|\, \rho(g) = g\}\,.$$

или

$$U = \{g \in C \,|\, \sigma(g) = g\}\,.$$

Для группы $\mathrm{SL}(N,\mathbb{C})$ подгруппа U есть $\mathrm{SO}(N,\mathbb{R})$. Пусть $U^{\mathbb{C}}$ – комплексификация вещественной группы U. Она является множеством неподвижных точек в $G^{\mathbb{C}}$ инволютивного автоморфизма $\theta = \sigma \circ \rho$

$$U^{\mathbb{C}} = \{g \in G^{\mathbb{C}} \,|\, \theta(g) = g\}\,.$$

Для $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ соответствующая подгруппа есть $U^{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}(N, \mathbb{C})$.

Определим пять типов фактор-пространств:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{I}. & \mathcal{X}_I = C \backslash G^{\mathbb{C}} & \rho\,(C) = C \\
\mathbf{II}. & \mathcal{X}_{II} = G^{\mathbb{R}} \backslash G^{\mathbb{C}} & \sigma\,(G^{\mathbb{R}}) = G^{\mathbb{R}} \\
\mathbf{III}. & \mathcal{X}_{III} = U \backslash C & \sigma\,(U) = U \\
\mathbf{IV}. & \mathcal{X}_{IV} = U \backslash G^{\mathbb{R}} & \rho\,(U) = U \\
\mathbf{V}. & \mathcal{X}_V = U^{\mathbb{C}} \backslash G^{\mathbb{C}} & \theta\,(U^{\mathbb{C}}) = U^{\mathbb{C}}
\end{array}$$

Они являются симметрическими пространствами. Симметрические пространства типов I, III и IV являются римановыми многообразиями, а пространства типов II и V – псевдо-римановы многообразия. Действие инволюций приводит к следующим взаимосвязям между симметрическими пространствами:

$$\mathcal{X}_{IV} = U \backslash G^{\mathbb{R}} \stackrel{\sigma}{\hookrightarrow} \mathcal{X}_I = C \backslash G^{\mathbb{C}}\,,$$

$$\mathcal{X}_{IV} = U \backslash G^{\mathbb{R}} \stackrel{\sigma}{\hookrightarrow} \mathcal{X}_V = U^C \backslash G^{\mathbb{C}}\,,$$

где стрелки означают вложения в качестве множества неподвижных точек. Аналогично

$$\mathcal{X}_{III} = U \backslash C \stackrel{\rho}{\hookrightarrow} \mathcal{X}_{II} = G^{\mathbb{R}} \backslash G^{\mathbb{C}}\,,$$

$$\mathcal{X}_{III} = U \backslash C \stackrel{\rho}{\hookrightarrow} \mathcal{X}_V = U^C \backslash G^{\mathbb{C}}\,.$$

Можно определить следующие модификации параболических расслоений Хиггса, приводящих, как и прежде, к интегририуемым системам.

Определим квази-антисимметическую структуру в расслоениях Хиггса так, что в отмеченных точках возникают кокасательные расслоения $T^*(\mathcal{X}_{V,a}) = T^*(U^{\mathbb{C}}_a \backslash G^{\mathbb{C}})$. Можно доказать, что пространства модулей $\mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ квази-антисимметрических расслоений Хиггса являются фазовыми пространствами комплексных вполне интегрируемых систем. Пространство модулей параболических расслоений Хиггса $\mathcal{M}_{par}(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ есть симплектический фактор пространства модулей квази-антисимметрических расслоений Хиггса $\mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ по действию конечномерной группы:

$$\mathcal{M}_{par}(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}}) = \mathcal{H} \backslash\backslash \mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})\,.$$

Это означает, что системы типа V являются интегрируемыми обобщениями параболических систем Хитчина. Координаты на $\mathcal{M}_{par}(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ играют роль коллективных координат на фазовом пространстве $\mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$.

Вещественные интегрируемые системы возникают следующим образом.

Предположим, что $\Sigma_{g,n}$ допускает анти-голоморфную инволюцию $\jmath : \Sigma_{g,n} \to \Sigma_{g,n}$. В окрестности неподвижных точек этого действия можно ввести локальную координату z, такую что инволюция $\jmath$ является комплексным сопряжением $\jmath(z) = \bar{z}$. Тогда множество неподвижных точек можно рассматривать как объединение $\Sigma^0 = \cup S^1_a$ копий единичной окружности S^1, вложенных в $\Sigma_{g,n}$. Предположим, что множество отмеченных точек $\mathcal{D}$ инвариантно относительно действия инволюции $\jmath(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$. Зададим две инволюции на пространстве модулей расслоений Хиггса $\mathcal{M}(\Sigma_g, G^{\mathbb{C}})$:

$$\iota^\rho(d_{\bar{A}}), \Phi) = (\jmath^*\rho(d_{\bar{A}}), -\jmath^*\rho(\Phi))\,, \quad \iota^\sigma(d_{\bar{A}}), \Phi) = (\jmath^*\sigma(d_{\bar{A}}), \jmath^*\sigma(\Phi))\,.$$

Множество неподвижных точек ι^σ - есть $G^{\mathbb{R}}$-расслоение Хиггса над Σ^0, а множество неподвижных точек ι^ρ – есть C-расслоение Хиггса над Σ^0. В качестве промежуточного шага построим два типа расслоений Хиггса, используя кокасательные расслоения к симметрическим пространствам типов I и II соответственно.

Тип I. Ассоциируем (или "прикрепим") с отмеченными точками кокасательные расслоения – пространства $T^*(\mathcal{X}_{I,a}) = T^*(C_a \setminus G^{\mathbb{C}})$. Будем называть такие расслоения Хиггса квази-компактными, так как в отмесннных точках калибровочная группа редуцируется до максимальных компактных подгрупп C_a (одной и той же во всех точках). Пространство модулей квази-компактных расслоений Хиггса $\mathcal{M}_I(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ является вещественным пространством. Однако его размерность превышает число интегралов движения. Для того, чтобы получить интегрируемую систему, нужно воспользоваться инволюцией ι^σ, действующей на $\mathcal{M}_I(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$. В итоге получим вложения

$$\mathcal{M}_{IV}(\Sigma_n^0, G^{\mathbb{R}}) \stackrel{\iota^\sigma}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_I(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}}), \quad \mathcal{M}_{IV}(\Sigma_n^0, G^{\mathbb{R}}) \stackrel{\iota^\sigma}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}}).$$

Можно доказать, что пространство модулей $\mathcal{M}_{IV}$ есть фазовое пространство вещественной вполне интегрируемой системы.

Тип II. Заменим в предыдущей конструкции кокасательные расслоения $T^*(\mathcal{X}_{I,a})$ на пространства $T^*(\mathcal{X}_{II,a}) = T^*(G_a^{\mathbb{R}} \setminus G^{\mathbb{C}})$. Такие расслоения Хиггса будем называть квази-нормальными, так как $G_a^{\mathbb{R}}$ – нормальная подгруппа в $G^{\mathbb{C}}$. Пространство модулей квази-нормальных расслоений Хиггса $\mathcal{M}_{II}(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ снова слишком большое, чтобы описывать интегрируемую систему. Для получения интегрируемой системы следует воспользоваться инволюцией ι^ρ, действующей на пространствах $\mathcal{M}_{II}(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$ и на $\mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}})$. Получим вложения

$$\mathcal{M}_{III}(\Sigma_n^0, C) \stackrel{\iota^\rho}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_{II}(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}}), \quad \mathcal{M}_{III}(\Sigma_n^0, C) \stackrel{\iota^\rho}{\hookrightarrow} \mathcal{M}_V(\Sigma_{g,n}, G^{\mathbb{C}}).$$

Тогда $\mathcal{M}_{III}$ – фазовое пространство вещественной вполне инетегрируемой системы.

Между пространствами модулей существуют взаимосвязи, которые можно схематично изобразить следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{II} & & \mathcal{M}_V \arrow[d, "\mathcal{H}\backslash\backslash"'] & & \mathcal{M}_I \\
& \mathcal{M}_{III} \arrow[ul, "\iota^\rho"] \arrow[ur, "\iota^\rho"] & \mathcal{M}_{par} & \mathcal{M}_{IV} \arrow[ul, "\iota^\sigma"'] \arrow[ur, "\iota^\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

1.2. 1+1 системы Хитчина, уравнение Ландау-Лифшица и полевой аналог систем Калоджеро

Для солитонных уравнений подход Хитчина к описанию интегрируемых систем также существует. В этом случае структурная группа расслояния является центрально расширенной группой петель. В этом смысле соответствующие расслоения Хиггса бесконечномерны. Классификация интегрируемых моделей в значительной степени повторяет классификацию систем механики. А она в свою очередь определяется кривой, точками на ней, структурной группой расслоения и данными расслоения в отмеченных точках. Для расслоений над эллиптической кривой классификация давно известна из работ Атьи. Векторные расслоения со структурной группой $G^{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}(N, \mathbb{C})$ над эллиптической кривой классифицируются рангом N и степенью deg. Например, для расслоения с одной отмеченной точкой и $N = 2$ получим двухчастичную систему Калоджеро для расслоений с deg$=0$ и эллиптический sl_2 волчок Эйлера для deg$=1$. Модель Калоджеро задается гамильтонианом

$$H_0^{\mathrm{CM}} = \frac{p^2}{2} - \frac{\nu^2}{8}\wp(q) \tag{1.1}$$

с канонической скобкой Пуассона

$$\{p, q\} = 1\,. \tag{1.2}$$

Волчок Эйлера описывается гамильтонианом

$$H_0^{\rm top} = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha^2 \wp(\omega_\alpha) \tag{1.3}$$

с линейной скобкой Пуассона-Ли

$$\{S_\alpha, S_\beta\} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma\,. \tag{1.4}$$

Указанные простые интегрируемые модели имеют 1+1 "полевое" обобщение (1+1 означает, что в системе есть одна полевая переменная и одна временная), то есть обобщение на бесконечномерный случай.

Обобщение системы Калоджеро на полевой случай описывается следующим образом. Скобка Пуассона имеет вид:

$$\{p(x), q(y)\} = \delta(x-y)\,. \tag{1.5}$$

А гамильтониан заметно усложняется по сравнению с механикой:

$$\mathbb{H}^{\rm CM} = \frac{1}{2}\oint dx\Big(p^2\left(1-\frac{k^2q_x^2}{c^2}\right) + \frac{(3k^2q_x^2-c^2)}{4}\wp(q) - \frac{k^4 q_{xx}^2}{4(c^2-k^2q_x^2)}\Big)\,, \tag{1.6}$$

где c – константа. Уравнения движения принимаю вид

$$\begin{gathered} q_t = p\left(1-\frac{k^2q_x^2}{c^2}\right)\,, \\ p_t = -\frac{k^2}{c^2}\partial_x\left(p^2 q_x\right) - \frac{(3k^2q_x^2-c^2)}{8}\wp'(q) + \frac{3k^2}{4}\partial_x\left(q_x\wp(q)\right) + \frac{k^4}{4}\partial_x\left(\frac{q_{xxx}\tilde\nu - \tilde\nu_x q_{xx}}{\tilde\nu^3}\right)\,, \end{gathered} \tag{1.7}$$

где

$$\tilde\nu = \sqrt{c^2-k^2q_x^2}\,, \quad c = \text{const}\,. \tag{1.8}$$

Полевое обобщение волчка Эйлера тоже известно. В этой системе

$$\{S_\alpha(x), S_\beta(y)\} = -\sqrt{-1}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_\gamma(x)\delta(x-y)\,, \tag{1.9}$$

и

$$\mathbb{H}^{\rm LL} = \frac{1}{2}\oint dx\Big({\rm tr}(SJ(S)) - \alpha_0{\rm tr}(S_x^2)\Big)\,, \quad \alpha_0 = k^2/(8\lambda^2)\,. \tag{1.10}$$

Уравнения движения имеют вид уравнений Ландау-Лифшица:

$$\partial_t S = [J(S), S] - \alpha_0\,[S, S_{xx}]\,, \quad S_{xx} = \partial_x^2 S\,, \tag{1.11}$$

В классической механике система Калоджеро и волчок Эйлера связаны процедурой модификации расслоения, увеличивающей степень соответствующего векторного расслоения на единицу. Подобная связь была предсказана ранее и в полевом случае. В отчетной работе удалось явно описать процедуру модификации в бесконечномерном случае и установить тем самым явную замену переменных между 1+1 полевой системой Калоджеро и уравнением Ландау-Лифшица. Матрица модификации имеет вид:

$$\tilde g(z) = \frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} \theta_{00}(z+q\,|\,2\tau)\tilde\nu & -\theta_{00}(q-z\,|\,2\tau)\,(c+kq_x) \\ -\theta_{10}(z+q\,|\,2\tau)\tilde\nu & \theta_{10}(q-z\,|\,2\tau)\,(c+kq_x) \end{pmatrix}\,. \tag{1.12}$$

и

$$\det\tilde g(z)=\rho^{-2}\tilde\nu(c+kq_x)\vartheta(z)\vartheta(q)=1\,. \tag{1.13}$$

$$\rho=\sqrt{\tilde\nu(c+kq_x)\vartheta(z)\vartheta(q)}\,. \tag{1.14}$$

Наличие тета-функции $\vartheta(z)$ в $\det\tilde g(z)$ как раз и означает, что степень расслоения изменяется на единицу. В итоге замена переменных явно вычисляется:

$$\begin{cases} S_1(p,q,c)=\Big(p-\dfrac{c}{2}\dfrac{k^2q_{xx}}{c^2-k^2q_x^2}\Big)\dfrac{\theta_{01}(0)}{\vartheta'(0)}\dfrac{\theta_{01}(q)}{\vartheta(q)}+\dfrac{c}{2}\dfrac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)}\dfrac{\theta_{00}(q)\theta_{10}(q)}{\vartheta^2(q)}\,,\\[2ex] S_2(p,q,c)=\Big(p-\dfrac{c}{2}\dfrac{k^2q_{xx}}{c^2-k^2q_x^2}\Big)\dfrac{\sqrt{-1}\theta_{00}(0)}{\vartheta'(0)}\dfrac{\theta_{00}(q)}{\vartheta(q)}+\dfrac{c}{2}\dfrac{\sqrt{-1}\theta_{00}^2(0)}{\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)}\dfrac{\theta_{10}(q)\theta_{01}(q)}{\vartheta^2(q)}\,,\\[2ex] S_3(p,q,c)=\Big(p-\dfrac{c}{2}\dfrac{k^2q_{xx}}{c^2-k^2q_x^2}\Big)\dfrac{\theta_{10}(0)}{\vartheta'(0)}\dfrac{\theta_{10}(q)}{\vartheta(q)}+\dfrac{c}{2}\dfrac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)}\dfrac{\theta_{00}(q)\theta_{01}(q)}{\vartheta^2(q)}\,. \end{cases} \tag{1.15}$$

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы

1. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, “Generalizations of parabolic Higgs bundles, real structures, and integrability”, J. Math. Phys., 62:10 (2021), 103502, 28 pp., arXiv: 2012.15529.

https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0050880

2. K. Atalikov, A. Zotov, “Field theory generalizations of two-body Calogero–Moser models in the form of Landau–Lifshitz equations”, J. Geom. Phys., 164 (2021), 104161, 14 pp., arXiv: 2010.14297.

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044021000371?via%3Dihub

3. Участие в конференциях и школах

1. доклад «Characteristic determinant and Manakov triple for double elliptic integrable system», международная конференция Workshop “Elliptic Integrable Systems”, 7-9 марта 2021 г.

2. доклвд «Представление Манакова для двойной эллиптической системы», семинар ”Комплексные задачи математической физики”, МИАН 18 марта 2021 г.

3. Популярная лекция "Об интегрируемых системах
Мехмат МГУ для школьников и абитуриентов.

4. доклад «On dualities in integrable systems», семинар CIS Centre of Integrable Systems, 19 мая 2021 г.

5. доклад "Integrable systems with elliptic dependence on momenta and related topics Beijing–Moscow Mathematics Colloquium, 4 июня 2021 г.

6. доклад "Manakov triple for double elliptic integrable system Classical and Quantum Integrable Systems (CQIS-2021), July 26-29 2021 Sochi, Sirius Mathematics Center

7. доклад "Integrable generalizations of Ruijsenaars model and Macdonald operators workshop "Field Theory, Geometry and Statistical Mechanics Independent University of Moscow and Poncelet Center, October 20-22, 2021.

4. Работа в научных центрах и международных группах

сотрудник: Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН)

сотрудник: «Международная лаборатория теории представлений и математической физики» в НИУ ВШЭ

с осени 2021 г. сотрудник ИТМФ-МГУ

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

соруководитель семинара «Методы классических и квантовых интегрируемых систем», Научно-образовательный центр при МИАН, весенний и осенний семестры;

профессор МФТИ, курс «Введение в интегрируемые системы» для 5-ого курса, весенний и осенний семестры на кафедре МФТИ-МИАН; курс «Теоретико-групповой подход в интегрируемых системах» для 4-ого курса, осенний семестр, «Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля» в ИТЭФ;

курс лекций «Гамильтонова механика и классические интегрируемые системы»,
осенний семестр 2021 г., Институт теоретической и математической физики при МГУ (ITMP);

научное руководство: 4 аспиранта, 2 студента (МФТИ, МГУ, ВШЭ)

ассоциированный сотрудник: Институт теоретической и математической физики в МГУ имени М.В. Ломоносова.

Принимал участие в организации Международной конференцит «Интегрируемость», посвященная 75-летию А. К. Погребкова, 22–24 сентября 2021 г. (МИАН-ВШЭ-Сколтех).

Итоги проекта за три года

За три года удалось получить ряд очень хороших результатов. В частности, описана система релятивистских взаимодействующих волчков в расслоениях над вырожденной эллиптической кривой (нодальной и каспидальной). Соответствующие волчки связаны с тригонометрическими и рациональными R-матрицами. Были явно описаны нечетные эллиптические R-матрицы на суперсимметричных эллиптических кривых. Суперсимметричная деформация сохраняет при этом ассоциативное уравнение Янга-Бакстера. Ряд важных результатов получен в квантово-классической и квантово-квантовой дуальностях, связывающих уравнения Книжника-Замолодчикова и системы частиц через проекцию Мацуо-Чередника. В последний год проекта описаны вещественные интегрируемые системы, а также модификация бесконечномерных расслоений на эллиптической кривой.

Из заявленных три года назад планов до сих пор не удалось построить явное описание линейной задачи для R-матричных пар Лакса, как "деформацию" уравнений Книжника-Замолодчикова с помощью спектрального параметра. Эта задача представляется интересной и важной. И, надеюсь, она будет решена в обозримом будущем. Для ее решения создан хороший задел. Несмотря на этот недостаток, я считаю проект очень удачным. Многие задачи были решены и получили дальнейшее развитие. Выражаю большую благодарность за поддержку Фондом!