Отчет по конкурсу «Молодая математика России» за 2020 год

Зотов Андрей Владимирович

1. Результаты, полученные в этом году:

Квантово-классическая дуальность для спиновых цепочек с границей

Введение. В своем простейшем виде квантово-классическая дуальность является следствием классического предела уравнений Книжника-Замолодчикова, которые следуя Н. Решетихину запишем в виде квантовых нестационарных уравнений Шредингера для модели Годена (или квантовой системы Шлезингера):

$$\kappa\partial_{z_i}\Psi = \mathbf{H}_i^{\mathrm{G}}\Psi\,, \quad \Psi\in\mathcal{H}\,, \quad i=1\,,\dots\,,N\,, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство модели Годена. В простейшем случае $\mathcal{H}=(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, а $\mathbf{H}_i^{\mathrm{G}}$ – квантовые гамильтонианы Годена

$$\mathbf{H}_i^{\mathrm{G}} = \mathbf{w}^{(i)} + \hbar\sum_{k\neq i}\frac{\mathbf{P}_{ik}}{z_i-z_k}\,, \quad i=1,\dots,N\,, \quad \mathbf{w}=\mathrm{diag}(\omega,-\omega) \tag{1.2}$$

и оператор перестановки $\mathbf{P}_{ik}$ i-ой и k-ой тензорных компонент в $\mathcal{H}$ имеет вид (записанный как в стандартном базисе, так и в базисе матриц Паули):

$$\mathbf{P}_{ik} = \sum_{a,b=1}^{2} E_{ab}^{(i)}E_{ba}^{(k)} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=0}^{3}\sigma_\alpha^{(i)}\sigma_\alpha^{(k)}\,, \qquad E_{ab}^{(i)} = 1\otimes 1\dots\underbrace{1\otimes E_{ab}\otimes 1}_{\text{на i-ом месте}}\dots 1\otimes 1\,. \tag{1.3}$$

Здесь верхний индексы означают номер компоненты в $\mathcal{H}$, в которой действует данная матрица. Например, $\mathbf{w}^{(i)}$ – матрица твистов $\mathrm{diag}(\omega,-\omega)$, действующая в i-ой компоненте. С физической точки зрения оператор $\mathbf{P}_{ik}$ описывает обменное взаимодействие i-ого и k-ого спинов.

Следующим шагом нам понадобится конструкция Мацуо-Чередника, связывающая систему уравнений (1.1) с многочастичной квантовой интегрируемой моделью Калоджеро-Мозера. Подействуем оператором $\kappa\partial_{z_i}$ на обе части своего (i-ого) уравнения КЗ. Сложим все полученные уравнения и умножим результат слева на специальный (постоянный) ковектор $\langle\Omega|\in\mathcal{H}^*$, обладающий свойством инвариантности: $\forall i,k$ $\langle\Omega|\mathbf{P}_{ik}=\langle\Omega|$. Нетрудно убедиться, что в результате такой проекции $\Psi=|\Psi\rangle\to\langle\Omega|\Psi\rangle$ получится стационарное уравнение Шредингера

$$\Big(-\frac{\kappa^2}{2}\sum_{i=1}^{N}\partial_{z_i}^2 + (\hbar-\kappa)\hbar\sum_{i<j}^{N}\frac{1}{(z_i-z_j)^2}\Big)\langle\Omega|\Psi\rangle = E\langle\Omega|\Psi\rangle\,, \tag{1.4}$$

где собственное значение $E = E(\omega)$ есть функция от параметра твиста.

Рассмотрим квазиклассический предел $\kappa \to 0$ в (1.1). В этом пределе Ψ имеет разложение вида $\Psi = (\Psi_0 + \kappa\Psi_1 + \ldots)e^{S/\kappa}$ с некоторой функцией $S = S(z_1, \ldots, z_N)$, что приводит к задаче

$$\mathbf{H}_i^{\mathrm{G}}\psi = H_i^{\mathrm{G}}\psi\,, \quad H_i^{\mathrm{G}} = \partial_{z_i}S, \quad \psi = \Psi_0 \in \mathcal{H}\,, \quad i = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

на собственные значения (коммутирующих) квантовых гамильтонианов Годена. В то же время квазиклассический предел спектральной задачи (1.4) дает некоторое значение $H^{\mathrm{CM}} = E_0(\omega)$ (фиксацию уровня) для классического гамильтониана Калоджеро-Мозера

$$H^{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 - \sum_{i<j}^{N} \frac{g^2}{(q_i - q_j)^2}\,, \quad p_i = \dot{q}_i \tag{1.6}$$

со следующей идентификацией переменных и параметров:

$$q_j = z_j\,, \qquad g = \hbar \qquad \text{and} \qquad \dot{q}_j = H_j^{\mathrm{G}}\,, \quad j = 1\,, \ldots, N\,. \tag{1.7}$$

То есть отмеченные точки в модели Годена отождествляются с координатами классических частиц Калоджеро, их скорости – с собственными значениями квантовых гамильтонианов Годена, а константа связи g – с постоянной Планка $\hbar$. Иными словами, квантовая задача модели Годена (1.5) оказывается связанной с точкой пересечения пары лагранжевых подмногообразий в фазовом пространстве классической механики интегрируемой системы. Это явление и называется квантово-классической дуальностью.

В наших прошлых работах результат (1.7) был уточнен следующим образом. Рассмотрим пару Лакса для классической модели Калоджеро

$$L_{ij}^{\mathrm{CM}}(\{\dot{q}_l\}\,, \{q_l\}\,, g) = \delta_{ij}\dot{q}_i + g\frac{1-\delta_{ij}}{q_i - q_j}\,, \quad i,j = 1\,, \ldots\,, N, \tag{1.8}$$

$$M_{ij}^{\mathrm{CM}} = \delta_{ij}\sum_{k\neq i}\frac{g}{(q_i - q_k)^2} - (1-\delta_{ij})\frac{g}{(q_i - q_j)^2}\,, \quad i,j = 1\,, \ldots\,, N, \tag{1.9}$$

то есть матричное $N \times N$ уравнение Лакса $\dot{L} = [L, M]$ эквивалентно уравнениям движения

$$\dot{p}_i = \ddot{q}_i = -\sum_{k\neq i}\frac{2g^2}{(q_i - q_k)^3}\,, \quad i = 1\,, \ldots\,, N\,. \tag{1.10}$$

Собственные значения матрицы Лакса $\mathrm{Spec}(L^{\mathrm{CM}}) = \{I_1, \ldots, I_N\}$ являются переменными действия, так как законы сохранения имеют вид $H_k^{\mathrm{CM}} = \dfrac{1}{k}\,\mathrm{tr}\,(L^{\mathrm{CM}})^k = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{N} I_i^k$.

Квантовую модель Годена (1.5) можно решить, используя алгебраический анзац Бете. Спектр H_i^{G} гамильтонианов для состояний ψ с M перевернутыми спинами находится в виде

$$H_i^{\mathrm{G}} = \omega + \sum_{k\neq i}^{N}\frac{\hbar}{z_i - z_k} + \sum_{\gamma=1}^{M}\frac{\hbar}{\mu_\gamma - z_i}\,, \quad i = 1, \ldots, N\,, \tag{1.11}$$

где параметры $\{\mu_\alpha\,, \alpha = 1, \ldots, M\}$ – корни Бете, удовлетворяющие системе M уравнений Бете (BE)

$$2\omega + \hbar\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\mu_\alpha - z_k} = 2\hbar\sum_{\gamma\neq\alpha}^{M}\frac{1}{\mu_\alpha - \mu_\gamma}\,, \quad \alpha = 1, \ldots, M\,. \tag{1.12}$$

Можно доказать следующее утверждение: при подстановке в матрицу Лакса (1.8) данных модели Годена с отождествлением (1.7), где собственные значения заданы в виде (1.11), а корни Бете удовлетворяют (1.12), получится матрица, у которой собственные значения (переменные действия) имеют вид:

$$\mathrm{Spec}\, L^{\mathrm{CM}}\left(\{H_j^{\mathrm{G}}\}, \{z_j\}\ , \hbar\right)\Big|_{BE} = \{\underbrace{\omega\,, \ldots, \omega}_{N-M}, \underbrace{-\omega\,, \ldots, -\omega}_{M}\}\,. \tag{1.13}$$

То есть уровни классических гамильтонианов определяются параметрами твиста и кратностями – квантовыми числами заполнения. С технической точки зрения данное утверждение основано на детерминантном тождестве

$$\det_{N\times N}\Big(\mathcal{L} - \lambda I\Big) = (\omega - \lambda)^{N-M}\det_{M\times M}\Big(\widetilde{\mathcal{L}} - \lambda I\Big)\,. \tag{1.14}$$

для пары матриц

$$\mathcal{L}_{ij} = \delta_{ij}\left(\omega + \sum_{k\neq i}^{N}\frac{\hbar}{q_i - q_k} + \sum_{\gamma=1}^{M}\frac{\hbar}{\mu_\gamma - q_i}\right) + (1-\delta_{ij})\frac{\hbar}{q_i - q_j}\,, \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{1.15}$$

и

$$\widetilde{\mathcal{L}}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}\left(\omega - \sum_{\gamma\neq\alpha}^{M}\frac{\hbar}{\mu_\alpha - \mu_\gamma} - \sum_{k=1}^{N}\frac{\hbar}{q_k - \mu_\alpha}\right) + (1-\delta_{\alpha\beta})\,\frac{\hbar}{\mu_\alpha - \mu_\beta}\,, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, M\,. \tag{1.16}$$

В этом году в рамках проекта решалась аналогичная задача для систем Калоджеро-Мозера, связанных с системами корней классических серий. Для таких моделей гамильтониан задается в виде

$$H = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}p_a^2 - g_2^2\sum_{a<b}^{N}\left(\frac{1}{(q_a-q_b)^2} + \frac{1}{(q_a+q_b)^2}\right) - g_4^2\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{(2q_a)^2} - g_1^2\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{q_a^2}\,, \tag{1.17}$$

а представление Лакса размера $(2N+1)\times(2N+1)$ имеет блочно-диагональный вид:

$$L = \begin{pmatrix} P+A & B & C \\ -B & -P-A & -C \\ -C^T & C^T & 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} \check{A}+d & \check{B} & \check{C} \\ -\check{B} & -\check{A}+d & -\check{C} \\ -\check{C}^T & \check{C}^T & d_0 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

где P, A, B блоки размера $N\times N$, C – столбец длины N:

$$P_{ab} = \dot{q}_a\delta_{ab}\,, \quad A_{ab} = \frac{g_2(1-\delta_{ab})}{q_a - q_b}\,, \quad (C)_a = \frac{g_1}{q_a}\,, \quad B_{ab} = \frac{g_2(1-\delta_{ab})}{q_a+q_b} + \frac{g_4\sqrt{2}\delta_{ab}}{2q_a} \tag{1.19}$$

и

$$\check{A}_{ab} = -\frac{g_2(1-\delta_{ab})}{(q_a-q_b)^2}\,, \quad (\check{C})_a = -\frac{g_1}{q_a^2}\,, \quad \check{B}_{ab} = -\frac{g_2(1-\delta_{ab})}{(q_a+q_b)^2} - \frac{g_4\sqrt{2}\delta_{ab}}{2q_a^2}\,, \tag{1.20}$$

В M-матрице присутствует диагональная часть $d_{ab} = \delta_{ab} d_a$ с

$$d_a = \frac{g_1^2}{g_2}\frac{1}{q_a^2} + g_4\sqrt{2}\frac{1}{(2q_a)^2} + g_2 \sum_{c\neq a}\Big(\frac{1}{(q_a-q_c)^2} + \frac{1}{(q_a+q_c)^2}\Big)\,, \quad d_0 = 2g_2\sum_{c=1}^{N}\frac{1}{q_c^2}\,. \tag{1.21}$$

Гамильтониан (1.17) $H = (1/4)\mathrm{tr}L^2$ дает уравнения движения, которые записываются в форме уравнений Лакса с парой (1.18) при дополнительном условии на константы связи g_2, g_4 и g_1:

$$g_1(g_1^2 - 2g_2^2 + \sqrt{2}g_2 g_4) = 0\,. \tag{1.22}$$

Классическим системам корней отвечают следующие частные случаи, удовлетворяющие (1.22):

– B_N (so_{2N+1}): $g_4 = 0$, $g_1^2 = 2g_2^2$, размер матрицы Лакса $(2N+1)\times(2N+1)$;

– C_N (sp_{2N}): $g_1 = 0$, размер матрицы Лакса $2N \times 2N$; (1.23)

– D_N (so_{2N}): $g_1 = 0$, $g_4 = 0$, размер матрицы Лакса $2N \times 2N$.

С квантовой стороны указанные выше системы Калоджеро оказываются связанными с моделями Годена с границей, которые получаются в предле из открытой спиной цепочки. Цепочка задается с помощью стандартной XXX R-матрицы Янга: $R^\eta_{12}(u) = 1\otimes 1 + (\eta/u)\mathbf{P}_{12}$, удовлетворяющей квантовому уравнению Янга-Бакстера:

$$R^\eta_{12}(u_1-u_2)R^\eta_{13}(u_1)R^\eta_{23}(u_2) = R^\eta_{23}(u_2)R^\eta_{13}(u_1)R^\eta_{12}(u_1-u_2), \tag{1.24}$$

а также K-матрицами $K^\pm$ – решениями уравнения отражения:

$$\begin{gathered}
R^\eta_{12}(u_1-u_2)K^-_1(u_1)R^\eta_{12}(u_1+u_2)K^-_2(u_2) = K^-_2(u_2)R^\eta_{12}(u_1+u_2)K^-_1(u_1)R^\eta_{12}(u_1-u_2), \\
R^\eta_{12}(-u_1+u_2)(K^+_1)^{T_1}(u_1)R^\eta_{12}(-u_1-u_2-2\eta)(K^+_2)^{T_2}(u_2) = \\
= (K^+_2)^{T_2}(u_2)R^\eta_{12}(-u_1-u_2-2\eta)(K^+_1)^{T_1}(u_1)R^\eta_{12}(-u_1+u_2)\,.
\end{gathered} \tag{1.25}$$

Для наших целей выбираются решения вида

$$K^-(u) = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{\alpha\eta}{u} & 0 \\ 0 & -1+\dfrac{\alpha\eta}{u}\end{pmatrix}, \qquad K^+(u) = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\beta\eta}{u+\eta} & 0 \\ 0 & -1-\dfrac{\beta\eta}{u+\eta}\end{pmatrix} \tag{1.26}$$

с произвольными параметрами α, β. Трансфер-матрица цепочки имеет вид:

$$\mathbf{T}(u) = \mathrm{tr}_0\Big(K^+_0(u)R^\eta_{01}(u-z_1)...R^\eta_{0N}(u-z_N)K^-_0(u)R^\eta_{0N}(u+z_N)...R^\eta_{01}(u+z_1)\Big)\,, \tag{1.27}$$

а в пределе $\varepsilon \to 0$ с подстановкой $\eta = \varepsilon\hbar$ получим

$$\mathbf{T}(u) = 2 + \varepsilon\hbar\gamma(u) + \varepsilon^2\hbar^2\mathbf{T}^{\mathrm{G}}(u) + O(\varepsilon^3)\,, \tag{1.28}$$

где $\gamma(u)=\sum_i\left(\frac{1}{u-z_i}+\frac{1}{u+z_i}\right)$ скалярная функция, и

$$\mathbf{T}^{\mathrm{G}}(u)=-\frac{2\alpha\beta}{u^2}+\frac{1}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\mathbf{H}_i^{\mathrm{G}}}{u-z_i}-\frac{\mathbf{H}_i^{\mathrm{G}}}{u+z_i}\right), \tag{1.29}$$

где

$$\frac{1}{\hbar}\,\mathbf{H}_i^{\mathrm{G}}=\frac{\xi\sigma_3^{(i)}}{z_i}+\sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{\mathbf{P}_{ik}}{z_i-z_k}+\frac{\sigma_3^{(i)}\mathbf{P}_{ik}\sigma_3^{(i)}}{z_i+z_k}\right), \qquad \xi=\alpha-\beta \tag{1.30}$$

Это и есть гамильтонианы модели Годена с границей. Анзац Бете дает следующие выражения для спектра квантовых гамильтонианов:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\hbar}\,H_i^{\mathrm{G}}=\frac{1}{\hbar}\,H_i^{\mathrm{G}}(\{z_k\}_N,\{\mu_\gamma\}_M,\xi)=\\ =\frac{\xi}{z_i}+\sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{1}{z_i-z_k}+\frac{1}{z_i+z_k}\right)-\sum_{\gamma=1}^{M}\left(\frac{1}{z_i-\mu_\gamma}+\frac{1}{z_i+\mu_\gamma}\right).\end{gathered} \tag{1.31}$$

Набор M корней Бете $\{\mu_\gamma\}_M$ удовлетворяет уравнениям Бете

$$\frac{2\xi}{\mu_\gamma}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\mu_\gamma-z_k}+\frac{1}{\mu_\gamma+z_k}\right)=\frac{2}{\mu_\gamma}+\sum_{c\neq\gamma}^{M}\left(\frac{2}{\mu_\gamma-\mu_c}+\frac{2}{\mu_\gamma+\mu_c}\right), \quad \gamma=1,\ldots,M\,. \tag{1.32}$$

Буквально вышеописанный случай оказывается связанным с моделями Калоджеро-Мозера типа C_N и D_N. В случае же системы корней B_N нужно рассмотреть ту же модель Годена, но для $N+1$ спинов и с условиями: $\xi=0$, $z_{N+1}=0$. Тогда гамильтонианы Годена принимают вид

$$\frac{1}{\hbar}\,\tilde{\mathbf{H}}_i^{\mathrm{G}}=\frac{\mathbf{P}_{i,N+1}}{z_i}+\frac{\sigma_3^{(i)}\mathbf{P}_{i,N+1}\sigma_3^{(i)}}{z_i}+\sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{\mathbf{P}_{ik}}{z_i-z_k}+\frac{\sigma_3^{(i)}\mathbf{P}_{ik}\sigma_3^{(i)}}{z_i+z_k}\right), \quad i=1,\ldots,N\,. \tag{1.33}$$

Собственные значения и уравнения Бете в этом случае таковы:

$$\frac{1}{\hbar}\,\tilde{H}_i^{\mathrm{G}}(\{z_k\}_N,\{\mu_\gamma\}_M)=\frac{2}{z_i}+\sum_{k\neq i}^{N}\left(\frac{1}{z_i-z_k}+\frac{1}{z_i+z_k}\right)-\sum_{\gamma=1}^{M}\left(\frac{1}{z_i-\mu_\gamma}+\frac{1}{z_i+\mu_\gamma}\right), \tag{1.34}$$

и

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{\mu_\gamma-z_k}+\frac{1}{\mu_\gamma+z_k}\right)=2\sum_{c\neq\gamma}^{M}\left(\frac{1}{\mu_\gamma-\mu_c}+\frac{1}{\mu_\gamma+\mu_c}\right), \quad \gamma=1,\ldots,M\,. \tag{1.35}$$

Основным результатом является

Теорема. *Отождествим отмеченные точки в модели Годена z_i с координатами частиц Калоджеро*

$$z_j=q_j\,, \quad j=1\,,\ldots\,,N \tag{1.36}$$

и сделаем подстановку

$$\dot{q}_j=H_j^G \quad or \quad \dot{q}_j=\tilde{H}_j^G\,, \quad j=1\,,\ldots\,,N \tag{1.37}$$

в матрицу Лакса (1.18), которую обозначим $L(\{\dot q_j\},\{q_j\}|\, g_1,g_2,g_4)$. Здесь H_j^G и $\tilde H_j^G$ собственные значения квантовых гамильтонианов Годена (1.31) и (1.34) соответственно. Для классических систем корней (1.23) выберем константы связи следующим образом:

B_N : $\tilde H_j^G$ *из (1.34)*, $g_1=\sqrt{2}\hbar$, $g_2=\hbar$, $g_4=0$, *размер матрицы Лакса* $(2N+1)\times(2N+1)$;

C_N : H_j^G *из (1.31)*, $g_1=0$, $g_2=\hbar$, $g_4=\sqrt{2}\hbar\,\xi$, *размер матрицы Лакса* $2N\times 2N$;

D_N : H_j^G *из (1.31) с* $\xi=0$, $g_1=0$, $g_2=\hbar$, $g_4=0$, *размер матрицы Лакса* $2N\times 2N$.

Если для любого $M\le[N/2]$, корни Бете $\{\mu_\gamma\}$ удовлетворяют уравнениям Бете (более точно, (1.35) для B_N случая, (1.32) для C_N и (1.32) с $\xi=0$ для D_N случая), то есть H_j^G или $\tilde H_j^G$ являются спектром модели Годена, то тогда все собственные значения матрицы Лакса $L(\{\tilde H_j^G\},\{q_j\}|\, g_1,g_2,g_4)$ or $L(\{H_j^G\},\{q_j\}|\, g_1,g_2,g_4)$, а следовательно, и все интегралы движения равны нулю.

Таким образом квантово-классическая дуальность установлена в указанных случаях с нулевым уровнем переменных действия.

Квантово-классическое соответствие для суперсимметричных спиновых цепочек с границей

Возвращаясь к формуле (1.13), можно задаться естественным вопросом. Раз между классической системой частиц и квантовой моделью Годена установлена дуальность, может ли это помочь решить квантовую задачу, минуя анзац Бете. Действительно, зафиксируем отождествление $q_j=z_j$, $g=\hbar$ и потребуем, чтобы матрица Лакса имела спектр (refq12). Тогда из соотношения $\dot q_j = H_j^{\mathrm{G}}$ можем получить спектр квантовых гамильтонианов, не решая уравнения Бете.

В действительности это не совсем так. Задача о вычислении скоростей частиц по набору собственных значений сводится к решению системы алгебраических уравнений. Оказывается, что решений этих уравнений больше, чем спектр модели Годена. Связано это с тем, что с одной классической моделью Калоджеро-Мозера связана дуальностью не одна модель Годена, а три. Та, которую мы уже описали, была построена по структурной группе $GL(2)$. Ее еще нужно дополнить аналогичными моделями с супергруппами $GL(1|1)$ и $GL(0|2)$. Тогда между тремя моделями Годена и системой Калоджеро установится взаимно-однозначное соответствие.

В этом году, в продолжение к результатам о моделях Годена с Границей исследовался и случай тех же моделей с границей, но построенных по супералгебрам Ли $gl(1|1)$ и $gl(0|2)$. Выяснилось, что как и для A_N серии, все три модели Годена связаны с одной и той же моделью Калоджеро, как это сформулировано в Теореме.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы

1. M. Vasilyev, A. Zabrodin, A. Zotov, *Quantum-classical duality for Gaudin magnets with boundary*, Nuclear Phys. B, 952 (2020), 114931 , 20 pp.,

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321320300171?via%3Dihub

2. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Odd supersymmetrization of elliptic R-matrices*, J. Phys. A: Math. Theor., 53:18 (2020), 185202, 16 pp.,

https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/ab7e53

3. A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov, *Odd supersymmetric Kronecker elliptic function and Yang–Baxter equations*, J. Math. Phys., 61 (2020), 103504 , 9 pp.,

https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0006294

4. M. Vasilyev, A. Zabrodin, A. Zotov, *Quantum-classical correspondence for gl(1|1) supersymmetric Gaudin magnet with boundary*, J. Phys. A: Math. Theor., 53:49 (2020), 494002, 20 pp.,

https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/abbf07

Препринты arXiv, отправленные в журналы, но еще не опубликованные

5. K. Atalikov, A. Zotov, *Field theory generalizations of two-body Calogero-Moser models in the form of Landau-Lifshitz equations*, arXiv:2010.14297

https://arxiv.org/pdf/2010.14297.pdf

3. Участие в конференциях и школах

1. доклад «Kronecker function on supersymmetric elliptic curves and Yang-Baxter equations», международная конференция «Integrable Systems and Automorphic Forms»; Sirius Mathematics Center, February 24-28, 2020 - Sochi, Russia

2. доклад «On double elliptic integrable system: characteristic determinant and Manakov triple», Институт теоретической и математической физики при МГУ (ITMP), 21 октября 2020

3. доклад, "Характеристический детерминант и тройка Манакова для двойной эллиптической системы Семинар отдела теоретической физики МИАН, Москва, 9 декабря 2020 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах

сотрудник: Математический центр мирового уровня «Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук» (МЦМУ МИАН)

сотрудник: «Международная лаборатория теории представлений и математической физики» в НИУ ВШЭ

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

соруководитель семинара «Методы классических и квантовых интегрируемых систем», Научно-образовательный центр при МИАН, весенний и осенний семестры;

профессор МФТИ, курс «Тоерия групп и представлений» для 2-ого курса, весенний семестр; курс «Теоретико-групповой подход в интегрируемых системах» для 4-ого курса, осенний семестр, «Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля» в ИТЭФе;

курс лекций «Гамильтонова механика и классические интегрируемые системы», весенний семестр 2020 г., Институт теоретической и математической физики при МГУ (ITMP); записан на сайт teach-in;

курс лекций «Введение в интегрируемые системы и дуальности», весенний семестр 2020 г., Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва; записан на сайт mathnet;

научное руководство: 2 студента МФТИ, 1 аспирант МФТИ, 2 аспиранта ВШЭ, 2 аспиранта Сколтеха, 1 аспирант ИТЭФ;

ассоциированный сотрудник: Институт теоретической и математической физики в МГУ имени М.В. Ломоносова.