Отчёт по гранту конкурса "Молодая математика России" за 2020 год

Дородный М. А.

Результаты исследования относятся к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Изучается усреднение нестационарных уравнений типа Шрёдингера, гиперболических уравнений и нестационарной системы Максвелла с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Классические результаты в теории усреднения — слабая сходимость решений таких уравнений к решениям уравнений с постоянными (эффективными) коэффициентами. Наша цель — получение точных оценок погрешности.

1. Полученные результаты. Рассматриваются самосопряжённые эллиптические матричные ДО второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ следующего вида

$$\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{1}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Здесь $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — $(m\times n)$-матрица ранга n (считаем, что $m \geqslant n$). Матрицы-функции $g(\mathbf{x})$ (размера $m\times m$) и $f(\mathbf{x})$ (размера $n\times n$) предполагаются периодическими относительно некоторой решётки Γ и такими, что $g(\mathbf{x}) > 0$; $g, g^{-1} \in L_\infty$; $f, f^{-1} \in L_\infty$. Целесообразно первоначально изучать более узкий класс операторов вида (1), отвечающий случаю $f = \mathbf{1}_n$. Многие операторы математической физики допускают запись в виде (1), (2).

Введём теперь малый параметр $\varepsilon > 0$ и условимся обозначать $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$. Рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon &= b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \\ \widetilde{\mathcal{A}}_\varepsilon &= f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{3}$$

коэффициенты которых быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Нас интересует поведение решений $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, при $\varepsilon\to 0$ следующих задач Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера и гиперболического уравнения:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial^2\tau} = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\ \dfrac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x},0). \end{cases}$$

В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$, $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$. Изучаются также более общие задачи с оператором (3).

Дадим краткий обзор известных результатов. В статье М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [1] были доказаны оценки

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{4}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{5}$$

Затем, в работе Ю. М. Мешковой [2] были установлены оценки

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{6}$$

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon,\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной *эффективной матрицей* g^0, $K(\varepsilon,\tau)$ — подходящий корректор. Далее, в статьях Т. А. Суслиной [3], Т. А. Суслиной и М. А. Дородного [4] была подтверждена точность оценок (4)–(6) относительно типа операторной нормы. С другой стороны, были найдены достаточные условия (которые формулируются в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра), позволяющие усилить результат и получить оценки

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{8}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{9}$$

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{10}$$

В работах [1–4] аналогичные результаты были получены и для оператор-функций от более общего оператора (3).

Перейдём к **описанию полученных результатов**. В работах [5,6] мы подтверждаем точность оценок (4)–(7) относительно зависимости от τ (при большом $|\tau|$): множитель $(1+|\tau|)$ нельзя заменить на $(1+|\tau|^\alpha)$ с $\alpha<1$ в общей ситуации; а также подтверждаем точность оценки (7) относительно типа нормы. С другой стороны, мы доказываем, что оценки (8)–(10) (справедливые при дополнительных предположениях) можно улучшить:

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon, \tag{11}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon, \tag{12}$$

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon. \tag{13}$$

Также при дополнительных предположениях была получена оценка

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon,\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon. \tag{14}$$

Доказана точность оценок (11)–(14) как относительно типа операторной нормы, так и относительно зависимости от τ. Эти улучшенные результаты позволяют получать сходимость решений с квалифицированной оценкой погрешности при больших временах, а именно, при $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ с $\alpha < 2$, что очень важно для приложений. Аналогичные результаты получены и для оператор-функций от более общего оператора (3). Рассмотрены приложения к конкретным уравнениям математической физики: нестационарному уравнению типа Шрёдингера с сингулярным потенциалом, двумерному волновому уравнению Паули, уравнению акустики, системе теории упругости.

Препринт [7] посвящён применению полученных результатов к задаче Коши для нестационарной системы Максвелла, в случае, когда диэлектрическая проницаемость задана быстро осциллирующей матрицей-функцией, а магнитная проницаемость постоянна. Получены аппроксимации для магнитных напряжённости и индукции по норме в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Если в начальный момент магнитное поле равно нулю, то удаётся получить аппроксимации для напряжённости и индукции электрического поля по норме в $L_2(\mathbb{R}^3)$, а также аппроксимации для магнитных полей по норме $H^1(\mathbb{R}^3)$. Отметим, что аппроксимации для электрических полей помимо основного члена (решения усреднённой системы) содержат слагаемые нулевого порядка, быстро осциллирующие при $\varepsilon \to 0$ (так называемые корректоры нулевого порядка).

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

- Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Applicable Analysis, to appear.
- Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.
- Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Homogenization of nonstationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability*, preprint (2020), arXiv:2008.03047 [math.AP].

3. Участие в конференциях и школах.

- Устный доклад на конференции "Conference on Spectral Theory and Mathematical Physics" (Сочи, Россия, 2020 г.)

4. Работа в научных центрах и международных группах. Инженер-исследователь в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера.

Список литературы.

[1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

[2] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, Journal of Spectral Theory, to appear; available from arXiv:1705.02531 [math.AP].

[3] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **446**:2 (2017), 1466–1523.

[4] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, Journal of Differential Equations, **264**:12 (2018), 7463–7522.

[5] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Applicable Analysis, to appear.

[6] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

[7] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Homogenization of nonstationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability*, preprint (2020), arXiv:2008.03047 [math.AP].