Отчёт по гранту конкурса
“Молодая математика России”
за 2021 год

Дородный М. А.

1. Полученные результаты. В этом году было продолжено изучение оценок погрешности при усреднении (гомогенизации) нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений.

В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряжённый оператор A, порождённый дифференциальным выражением

$$A = -\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx} + V(x),$$

где g — измеримая вещественнозначная функция такая, что $0 < \alpha_0 \leqslant g(x) \leqslant \alpha_1 < \infty$, $g(x+1) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, а потенциал $V \in L_1(0,1)$, $V(x+1) = V(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Введём малый параметр $\varepsilon > 0$ и условимся обозначать $\psi^\varepsilon(x) \coloneqq \psi(\varepsilon^{-1}x)$ для всякой 1-периодической функции $\psi(x)$. Рассмотрим оператор

$$A_\varepsilon = -\frac{d}{dx}g^\varepsilon(x)\frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(x) \tag{1}$$

с сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2}V^\varepsilon(x)$. Коэффициенты оператора (1) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

Хорошо известно, что процедура усреднения представляет собой спектральный пороговый эффект на краю спектра периодического оператора. Однако, можно также изучать аналоги задач усреднения, связанные с внутренними краями спектра оператора A_ε (т. н. высокочастотное усреднение). Такие задачи представляют интерес, например, при изучении фотонных кристаллов. Мы изучали операторные оценки погрешности при высокочастотном усреднении нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболического уравнения в одномерном случае. Пусть $\sigma > 0$ — (невырожденный) левый край зоны с нечётным номером $s \geqslant 3$ в спектре оператора A; для оператора A_ε этот край "уезжает" в точку $\varepsilon^{-2}\sigma$ (в область высоких частот (энергий)). Изучается поведение при $\varepsilon \to 0$ решений задач Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x), \end{cases} \tag{2}$$

и для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v_\varepsilon(x,t) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,t) + \varepsilon^{-2}\sigma v_\varepsilon(x,t), \\ v_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x),\ (\partial_t v_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon g)(x). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $f, g \in L_2(\mathbb{R})$,

$$(\Upsilon_\varepsilon f)(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(k) \sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx}\varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k)\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\,dk,$$

$\{e^{ikx}\varphi_j(x,k)\}_{j=s}^{\infty}$ — блоховские волны, отвечающие зонам с номерами $j \geqslant s$,

$$\widetilde{\Omega}_j = (-j\pi, -(j-1)\pi] \cup ((j-1)\pi, j\pi], \qquad j \in \mathbb{N},$$

— зоны Бриллюэна. Начальные данные задач (2), (3) представляют собой суперпозицию блоховских волн с амплитудами, равными Фурье-образам $(\Phi f)(k)$ и $(\Phi g)(k)$ функций $f(x)$, $g(x)$, и принадлежат подпространству $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)L_2(\mathbb{R})$, где $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)$ — спектральный проектор оператора A_ε, отвечающий интервалу $[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)$. **Основные результаты работы** — оценки вида

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma}\varphi_\sigma^\varepsilon u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon\|f\|_{H^2(\mathbb{R})}, \qquad f \in H^2(\mathbb{R}),$$
$$\|v_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_\sigma^\varepsilon v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon(\|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}),$$
$$f \in H^{3/2}(\mathbb{R}),\ g \in H^{1/2}(\mathbb{R}).$$

Здесь u_0 и v_0 — решения эффективных задач

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}u_0(x,t) = (A_\sigma^{\mathrm{hom}}u_0)(x,t), \\ u_0(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v_0(x,t) = -(A_\sigma^{\mathrm{hom}}v_0)(x,t), \\ v_0(x,0) = f(x),\ (\partial_t v_0)(x,0) = g(x); \end{cases}$$

$A_\sigma^{\mathrm{hom}} = -b_\sigma \frac{d^2}{dx^2}$ — соответствующий эффективный оператор, $b_\sigma > 0$ — коэффициент в асимптотике зонной функции $E(k)$, отвечающей зоне, для которой σ — левый край: $E(k) \sim \sigma + b_\sigma k^2$, $k \sim 0$; а φ_σ — периодическое решение уравнения $A\varphi_\sigma = \sigma\varphi_\sigma$, нормированное в $L_2(0,1)$.

Рассмотрены остальные случаи: когда σ — невырожденный правый край зоны с нечётным номером, и когда σ — невырожденный левый или правый край зоны с чётным номером. Также были получены оценки с интерполяцией для $f \in H^q(\mathbb{R})$, $0 \leqslant q \leqslant 2$, в случае задачи (2) и $f \in H^q(\mathbb{R})$, $g \in H^r(\mathbb{R})$, $0 \leqslant q \leqslant 3/2$, $-1 \leqslant r \leqslant 1/2$, в случае задачи (3); подтверждена точность полученных оценок как относительно типа нормы, так и относительно зависимости от t (при больших t). Результаты работы опубликованы в препринте [1].

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

[1] Дородный М.А., *Высокочастотное усреднение нестационарных периодических уравнений*, препринт Санкт-Петербургского мат. общества # 2021-05, доступен по ссылке http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2021/index.html#05.

3. Участие в конференциях и школах.

- Устный доклад (online) на конференции “Дни дифракции”, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, 31 мая – 4 июня 2021 г.
- Устный доклад (online) на конференции “Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ”, МФТИ, Долгопрудный, 30 июня – 9 июля 2021 г.
- Устный доклад на конференции “Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы”, НИУ БелГУ, Белгород, 25–29 октября 2021 г.
- Планируется устный доклад (online) на конференции им. И. Г. Петровского “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, МГУ, Москва, 26–30 декабря 2021 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах. Инженер-исследователь в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера.