Итоговый отчёт по гранту конкурса “Молодая математика России”

Дородный М. А.

1. Результаты, полученные за 2022 год. В прошлом году мы изучали высокочастотное усреднение нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболических уравнений в одномерном случае. В этом году мы изучали аналогичную задачу для нестационарного уравнения Шрёдингера в многомерном случае.

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решётки Γ, $\widetilde{\Omega}$ — центральная зона Бриллюэна двойственной решётки. Для любой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ введём обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) \coloneqq F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ — (малый) параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим дифференциальный оператор (ДО), порождённый выражением

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} \check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\mathbf{x})$$

с Γ-периодическими метрикой $\check{g}(\mathbf{x})$ и потенциалом $V(\mathbf{x})$. Предполагается, что $\check{g}$ — измеримая симметричная $(d\times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, $\alpha_0\mathbf{1} \leqslant \check{g}(\mathbf{x}) \leqslant \alpha_1\mathbf{1}$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$, и $V(\mathbf{x})$ — вещественная функция, причём $V \in L_q(\Omega)$, $q > d/2$ при $d \geqslant 2$, $q = 1$ при $d = 1$.

Пусть $(\mathbf{k}^\circ, \lambda_0)$ — произвольная точка дисперсионного соотношения оператора A_1. В частности, это может быть точка экстремума зонной функции или точка, где "встречаются" две ветви дисперсионного соотношения (часто в таком случае образуется так называемый конус Дирака). Пусть $\{e^{i\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x})\}_{j=1}^p$ — отвечающие ей блоховские волны; мы считаем, что $\big(\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ,\cdot),\varsigma_k(\mathbf{k}^\circ,\cdot)\big)_{L_2(\Omega)} = \delta_{jk}$. Нас интересует поведение при $\varepsilon\to 0$ решений $u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, $j = 1,\dots,p$, следующих задач Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (A_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau), \qquad u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}), \end{cases}$$

где $f_j(\mathbf{x})$ — заданные функции. *Основной результат работы* — оценки

$$\|u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau) - u_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon\|f_j\|_{H^3(\mathbb{R}^d)}, \qquad j = 1,\dots,p,$$

где

$$u_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau) \coloneqq e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^p \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x})v_{jl,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau)$$

и $\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau) = (v_{j1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau),\dots,v_{jp,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau))^{\mathrm{t}}$ — решение "эффективной" системы

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (A_\varepsilon^{\mathrm{eff}}\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}})(\mathbf{x},\tau), \qquad \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},0) = f_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{e}_j$ — элемент стандартного базиса в $\mathbb{C}^p$, $A_\varepsilon^{\mathrm{eff}}$ — *эффективный оператор*, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^p)$:

$$A_\varepsilon^{\mathrm{eff}} = \begin{pmatrix} A_\varepsilon^{\mathrm{eff},11} & \dots & A_\varepsilon^{\mathrm{eff},1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_\varepsilon^{\mathrm{eff},p1} & \dots & A_\varepsilon^{\mathrm{eff},pp} \end{pmatrix},$$
$$A_\varepsilon^{\mathrm{eff},ls} \coloneqq \varepsilon^{-2}\lambda_0 I - i\varepsilon^{-1}\left\langle \mathfrak{g}^{1,ls}, \nabla \right\rangle - \operatorname{div}\mathfrak{g}^{2,ls}\nabla,$$

с *постоянными коэффициентами* $\mathfrak{g}^{1,ls}$ и $\mathfrak{g}^{2,ls}$, для которых описана процедура построения. Результаты работы опубликованы в препринте [1].

Помимо этого, в ходе совместной с Т. А. Суслиной работы изучались аппроксимации при учёте корректоров решений $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\to 0$, задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial^2\tau} = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \qquad \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \end{cases}$$

с действующим в $L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ оператором

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}).$$

Здесь $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — $(m\times n)$-матрица ранга n (считаем, что $m\geqslant n$). Эрмитова матрица-функция $g(\mathbf{x})$ (размера $m\times m$) предполагается периодической относительно решётки Γ и такой, что $g(\mathbf{x})>0$; $g, g^{-1}\in L_\infty$. Так как

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi},$$

то в операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$. *Цель работы* — за счёт учёта корректора получить аппроксимации по $(H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d))$-норме (с подходящим r) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ для обоих операторов, а также аппроксимацию для оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ по $(H^r(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d))$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$. Построить такие аппроксимации для оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ не удаётся, но их можно получить для композиции $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$, где Λ — Γ-периодическое решение задачи на ячейке Ω:

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0,$$

и Π_ε — ПДО, символ которого есть характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$. Пусть $\mathcal{A}_0$ — усреднённый оператор: $\mathcal{A}_0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, $g^0 = \int_\Omega g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1})\,d\mathbf{x}$. *Наши результаты*:

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \cos(\tau\mathcal{A}_0^{1/2}) - \varepsilon K_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon,$$
$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon) - \cos(\tau\mathcal{A}_0^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2,$$
$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \mathcal{A}_0^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_0^{1/2}) - \varepsilon\widetilde{K}(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2.$$

Корректор $K_1(\varepsilon,\tau)$ имеет вид $K_1(\varepsilon,\tau) = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_0^{1/2})$. Корректоры $K(\varepsilon,\tau)$ и $\widetilde{K}(\varepsilon,\tau)$ имеют более сложную структуру: $K(\varepsilon,\tau) = K_1(\varepsilon,\tau) + K_2(\tau)$ и $\widetilde{K}(\varepsilon,\tau) = \widetilde{K}_1(\varepsilon,\tau) + \widetilde{K}_2(\tau)$, где $\widetilde{K}_1(\varepsilon,\tau) = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathcal{A}_0^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_0^{1/2})$, а члены $K_2(\tau)$ и $\widetilde{K}_2(\tau)$ не зависят от ε; их описание достаточно громоздко.

Эти оценки точны по порядку. В общем случае они точны также по типу операторной нормы и в отношении зависимости от времени τ. Однако, при некоторых дополнительных предположениях эти результаты допускают усиление. Полученные оценки применяются к исследованию решений задачи Коши для гиперболического уравнения с начальными данными из специального класса. Работа готовится к печати.

2. Опубликованные и поданные в печать работы.

[1] М. А. Дородный, *Высокоэнергетическое усреднение многомерного нестационарного уравнения Шрёдингера*, препринт Санкт-Петербургского мат. общества # 2022-01, доступен по ссылке http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2022/index.html#01.

3. Участие в конференциях и школах.

- Устный доклад на Конференции по спектральной теории и математической физике памяти М. Ш. Бирмана, ММИ им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, 22–26 июня 2022 г.
- Устный доклад на Девятой конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE-2022), РУДН, Москва, 28 июня – 5 июля 2022 г.
- Устный доклад на Второй конференции Математических центров России, МГУ, Москва, 7–11 ноября 2022 г.

4. Работа в научных центрах и международных группах. Инженер-исследователь в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера.

5. Сравнение достигнутых за 3 года результатов с проектом исследований. Подведём итоги трёх лет, сравнив их с заявкой по пунктам:

- *Изучить поведение оценок погрешности для операторной экспоненты в зависимости от времени. Ожидается, что множитель* $(1+|\tau|)$ *в оценке*

  $$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}_0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon$$

  (*результат М. Ш. Бирмана, Т. А. Суслиной, 2008*) *нельзя улучшить* (*заменить на* $(1+|\tau|)^\alpha$ *с* $\alpha<1$) *в общей ситуации, но при дополнительных предположениях получится оценка*

  $$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}_0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

  Это позволит получать сходимость решений с квалифицированной оценкой погрешности при больших временах, а именно, при $\tau = O(\varepsilon^{-\delta})$ *с* $\delta<2$, *что раньше было невозможным.*

  Итог. Сделано.

- *Изучить зависимость оценок от времени для уравнений гиперболического типа.*

  Итог. Сделано. Доказана точность оценок

  $$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau\mathcal{A}_0^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon,$$
  $$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \mathcal{A}_0^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_0^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon,$$

полученных М. Ш. Бирманом, Т. А. Суслиной (2008) и Ю. М. Мешковой (2017), относительно зависимости от τ. С другой стороны, были найдены достаточные условия, позволяющие усилить результат и получить оценки

$$\begin{aligned} \| \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau \mathcal{A}_0^{1/2}) \|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \\ \| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \mathcal{A}_0^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_0^{1/2}) \|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Это также позволяет получать сходимость решений с квалифицированной оценкой погрешности при больших временах $\tau = O(\varepsilon^{-\delta})$ с $\delta < 2$.

- *Изучить операторные оценки погрешности для гиперболических уравнений с операторами, включающими члены младшего порядка.*

  Итог. Не сделано. В процессе исследований интересы сместились в другие области, но к этим вопросам позже нужно будет вернуться.

- *Исследовать аппроксимацию для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ в энергетической норме: подтвердить, что оценка*

  $$\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \mathcal{A}_0^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_0^{1/2}) - \varepsilon \widetilde{K}_1(\varepsilon,\tau) \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon$$

  (*результат Ю. М. Мешковой, 2017*) *является точной как относительно типа операторной нормы, так и относительно зависимости от времени*; *и доказать, что при дополнительных предположениях её можно улучшить*:

  $$\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \mathcal{A}_0^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_0^{1/2}) - \varepsilon \widetilde{K}_1(\varepsilon,\tau) \|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

  Для нестационарного уравнения акустики планируется получить усиление оценок по времени, а для системы теории упругости такого не ожидается.

  Итог. Сделано.

- *Исследовать поведение решений задачи Коши для нестационарной системы Максвелла*

  $$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = \quad (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), & \operatorname{div}(\eta^\varepsilon \mathbf{E}_\varepsilon) = 0, \\ \partial_\tau \mathbf{H}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(\mu^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \ \operatorname{rot} \mathbf{E}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), & \operatorname{div}(\mu^\varepsilon \mathbf{H}_\varepsilon) = 0, \\ \quad \mathbf{D}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}),\ \mathbf{B}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in J, \end{cases}$$

  где $J = \{\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^3)\colon \operatorname{div} \mathbf{f} = 0 \ (\textit{в смысле распределений})\}$, *диэлектрическая проницаемость* $\eta(\mathbf{x})$ *и магнитная проницаемость* $\mu(\mathbf{x})$ — Γ-*периодические матрицы, ограниченные и равномерно положительные.*

  Итог. Частично сделано. Изучен случай, когда диэлектрическая проницаемость задана быстро осциллирующей матрицей-функцией, а магнитная проницаемость постоянна. Получены аппроксимации для магнитных напряжённости $\mathbf{H}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ и индукции $\mathbf{B}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^3)$. Если в начальный момент магнитное поле равно нулю, то удаётся получить аппроксимации для напряжённости $\mathbf{E}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ и индукции $\mathbf{D}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ электрического поля по норме в $L_2(\mathbb{R}^3)$, а также аппроксимации для магнитных полей по норме $H^1(\mathbb{R}^3)$. Планируется дальнейшее исследование данной задачи.

В процессе появились и были решены новые задачи, которые изначально не предполагались:

- Получены оценки погрешности при высокочастотном (высокоэнергетическом) усреднении нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболического уравнения.

- Получены аппроксимации с учётом корректора по $(H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d))$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ для операторов $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, а также аппроксимации для оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)$ по $(H^r(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d))$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$.

В ходе выполнения проекта опубликованы следующие работы:

[1] М. А. Дородный, *Высокоэнергетическое усреднение многомерного нестационарного уравнения Шрёдингера*, препринт Санкт-Петербургского мат. общества # 2022-01, доступен по ссылке http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2022/index.html#01.

[2] M. A. Dorodnyi, *High-frequency homogenization of nonstationary periodic equations*, arXiv:2202.03919 [math.AP].

[3] M. A. Dorodnyi, *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Applicable Analysis, **101**:16 (2022), 5582–5614.

[4] M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina, *Homogenization of a non-stationary periodic Maxwell system in the case of constant permeability*, Journal of Differential Equations, **307** (2022), 348–388.

[5] М. А. Дородный, Т. А. Суслина, *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в* $\mathbb{R}^d$: *точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

Ещё одна работа готовится к публикации.