Отчёт 2020 по проекту
«Оснащённые мотивы над Spec $\mathbb{Z}$»,
основной результат:
теорема о Нисневич/tf-строгой гомотопической инвариантности.

1. Достигнутые результаты

Мотивные когомологии и мотивные гомотопичесике группы над базовой схемой S определены как группы гомоморфизмов в категории мотивов Воеводского $\mathbf{DM}(S)$ [11, 3] и стабильной мотивной гомотопической категории Мореля-Воеводского $\mathbf{SH}(S)$ [8], которые сочетают в себе конструкции (алгебраической) топологии с объектами алгебраической геометрии и теории схем.

Для категорий $\mathbf{DM}(k)$ и $\mathbf{SH}(k)$ над полем выплняется ряд известных структурных утверждений. В частности, оригинальная конструкция категории эффективных мотивов Воеводского $\mathbf{DM}_{\mathrm{eff}}(k)$ отождествляет её с подкатегорией мотивных комплексов в производной категории $\mathbf{D}(\mathrm{Sh}^{\mathrm{tr}}_{\mathrm{nis}}(k))$ пучков с трансферами и допускает некоторое явное вычисление функтора мотивной локализации, котрое использовалось в дальнейших вычислениях мотивных когомологий. Для случая категории $\mathbf{SH}(k)$ аналогичный инструмент был разработан в теории оснащённых мотивов Гаркуши-Панина [4], построенной на базе неопубликованных построений Воеводского об оснащённых соответствиях [10]. Одним из фундаментальных результатов, лежащим в основе теории мотивов Воеводского и теории оснащённых мотивов, является теорема о строгой гомотопической инвариантности гомотопически инвариантных предпучков с трансферами [9] или оснащёнными трансферами [5].

В рамках проекта совместно с соавторами было получено некоторое обобщение теоремы о строгой гомотопической инвариантности на случай $\mathbb{A}^1$-гомотопически инвариантных предпучков с трансферами над Spec $\mathbb{Z}$, см. теорему 1.4. Обобщение основано на некотором разделении топологии Нисневича, исходя из того, как квадраты Нисневича ведут себя по отношению к $\mathbb{A}^1$-гомотопиям и оснащённым соответствиям. Предполагается использовать результат(ы), чтобы объяснить некоторые известные ранее дефекты, появляющиеся при переходе к общему случаю мотивных пространств Мореля-Воеводского над базовыми схемами. Исследование направлено на выявление соответствуюших этим дифектам препятствий и вычисление стабильных мотивных гомотопических групп.

1.1. Контрпример к строгой $\mathbb{A}^1$-гом. инв. в случае базовой схемы.

Категории $\mathbf{DM}(k)$ и $\mathbf{SH}(k)$ над полем и $\mathbf{DM}(S)$ и $\mathbf{SH}(S)$ над базовыми схемами положительной размерности отличаются в своём поведении. Примером такого отличия являются свойства гомотопической t-структуры. В случае базового поля функтор (стабильной) мотивной локализации сохраняет гомотопическую t-структуру; для $\mathbf{DM}(k)$ над совершенным полем это следует из оригинальных результатов Воеводского о предпучках с трансферами [9], и для $\mathbf{SH}(k)$ над произвольным полем это утверждает теорема Моремля, называемая теореой о стабильной связности [7]. Это даёт описание сердцевины гомотопической t-структуры в терминах строго гомотопически инвариантных пучков или пучков с трансферами и влечёт, в частности, что пучки стабильных мотивных гомотопических групп являются строго гомотопически инвариантными. Однако Ж. Айуб построил контрпример для некоторых базовых схем [2], а именно комплекс пучков с трансферами мотивные, когомологии которого не являются строго гомотопически инвариантными, что опровергло гипотезу о выполнении сформулированных выше свойств в общем случае для категории мотивов Воеводского $\mathbf{DM}(S)$ и категории $\mathbf{SH}(S)$ над базовыми схемами. В рамках выполняемого проекта для всех базовых схем положительной размерности Крулля был построен контрпример к теореме о строгой гомотопической инвариантности для $\mathbb{A}^1$-инвариантных пучков с трансферами, упомянутой выше [9, 5].

Утверждение 1.1. *Пусть S – схема, U – аффинная открытая подсхема, и $f \in \mathcal{O}_U(U)$ – регулярная функция, такая что подсхема нулей $Z = Z(f)$ имеет всюду положительную коразмерность. Пусть $X \in \mathrm{Sm}_S$, $x \in X \times_S Z$. Тогда для некоторого $\mathbb{A}^1$-инвариантного предпучка с трансферами $\mathcal{F}$ ассоциированный пучок $\mathcal{F}_{\mathrm{nis}}$ не является строго гомотопически инвариантным.*

Рассмотрим квадрат Зарисского

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1 \times X^h_x \times_S (S-Z) - Z(ft-1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{A}^1 \times X^h_x - Z(ft-1) \arrow[d] \\ \mathbb{A}^1 \times X^h_x \times_S (S-Z) \arrow[r] & \mathbb{A}^1 \times X^h_x, \end{tikzcd}$$

где t обозначает координатную функцию на $\mathbb{A}^1$. Пусть

$$\mathcal{F} = \mathrm{coker}(\mathrm{Cor}(\mathbb{A}^1 \times -, V_J) \to \mathrm{Cor}(-, V_J)),$$

где гомоморфизм задан разностью обратного образа вдоль сечений $\{0\} \to \mathbb{A}^1$ и $\{1\} \to \mathbb{A}^1$, и $V_J = \mathbb{A}^1 \times X^h_x \times_S (S-Z) - Z(ft-1)$. Тогда класс тождественного отображения id_{V_J} в $\mathcal{F}(V_J)$ переходит под действием граничного отображения

$$H^0(V_J, \mathcal{F}) \to H^1(\mathbb{A}^1 \times X^h_x, \mathcal{F})$$

в нетривиальный элемент $H^1_{\mathrm{nis}}(\mathbb{A}^1 \times X^h_x, \mathcal{F}_{\mathrm{nis}}) \neq 0$.

Приведённый контрпример опровергает формулы для (вычисления) мотивной локализации, полученные в теориях мотивов [11] (и оснащённых мотивов [4]), в общем случае. Нужно отметить, сравнивая указанный выше и известный ранее результаты, что полученный контрпример к теореме о строгой гомотопичеокй инвариантости справедлив для произвольной базовой схемы положительной размерноси Крулля, но пример комплекса с не строго $\mathbb{A}^1$-гомотопически инвариантными мотивными когомологиями сильнее, чем опровержение теоремы о строгой гомотопической инвариантности для предпучков с трансферами.

1.2. tf**-топология.** В работе по проекту введено определение следующей подтопологии топологии Нисневича, называемой tf-топологией (trivial fibre), поскольку у этой топологии 'тривиальные слои' над полями вычетов.

Definition 1.2. tf-топология является cd-топологией на категории схем Sch_S над базовой схемой S, порождённой квадратами Нисневича

$$\begin{tikzcd} X' - Y' \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\ X - Y \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

такими, что $Y = X \times_S Z$ для $X \in \mathrm{Sch}_S$ и замкнутых подсхем Z в S, $Y' = X' \times_S Y \cong Y$ и морфизм $X' \to X$ является этальным аффинным.

В отличие от топологии Нисневича эта топология зависит от базовой схемы, являясь тривиальной в случае $S = \mathrm{Spec}\, k$ для любого поля k. При ограничении на малый этальный сайт $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$ над схемой S конечной разерности Крулля tf-топология совпадает с топологий Нисневича на $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}_S$. Более того, tf-топология на Sm_S имеет некоторые схожие черты с топологий Нисневича на Et_S, однако сильнее обратного образа этой топологии на Sm_S. Значение tf-топологии для мотивной гомотопической категории легко проиллюстрировать следующей теоремой, которая усиливает известную ранее в случае топологии Нисневича теорему (теоремы) о свойстве локализации, полученную и доказанную для категорий $\mathbf{SH}(S)$ и $\mathbf{H}(S)$ и этальных версий Ф. Моремлем и В. Воеводским [8] и Ж.Айубом [1], исследованную также Ф. Деглизе и Д. Цизинским для случая $\mathbf{DM}(S)$ [3] и доказанную для случая оснащённых мотивных пространств $\mathbf{H}^{\mathrm{fr}}(S)$ и спектров $\mathbf{SH}^{\mathrm{fr}}(S)$ М. Аюа [6].

Теорема 1.3. *Пусть S – сепарабельная нётерова схема конечной размерности, Z – замкнутая подсхема и $U = S - Z$. Рассмотрим мотивную гомотопическую категорию $\mathbf{H}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}_S)$ по отношению к* tf*-топологии на гладких аффинных схемах над S и пары сопряжённых функторов*

$$\mathbf{H}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}) \underset{i^!}{\overset{i_*}{\rightleftarrows}} \mathbf{H}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}) \underset{j_*}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} \mathbf{H}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}),$$

заданные морфизмами tf*-сайтов* $i\colon (Z)_{\mathrm{Sm}} \to (S)_{\mathrm{Sm}}$, $j\colon (U)_{\mathrm{Sm}} \to (S)_{\mathrm{Sm}}$ *глдаких схем над* Z, S, U.

Для всякого $\mathcal{F} \in \mathbf{H}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}_S)$ *имеет место гомотопически расслоенный (pullback) квадрат*

$$\begin{array}{ccc} i_*i^!(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \longrightarrow & j_*j^*(\mathcal{F}). \end{array}$$

Аналогичное выполняется для случая мотивной гомотопической категории оснащённых мотивных пространств $\mathbf{H}^{\mathrm{fr}}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}_S)$ *и, как следствие, для категорий* $\mathbf{SH}_{\mathrm{tf}}(S)$, $\mathbf{SH}^{\mathrm{fr}}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{SmAff}_S)$.

Утверждение верно для всякой топологии τ *на* Aff_S, *содержащей* tf*-топологию, и такой, что всякое покрытие в категории* SmAff_Z *поднимается вдоль функтора замены базы до покрытия в* SmAff_S.

В действительности, tf-топология на категории аффинных схем Aff_S над схемой S является самой сильной среди подтопологий топологии Нисневича, которые тривиальны при ограничении на категории над полями вычетов, и, как предполагается, самой слабой подтопологией на SmAff, удовлетворяющей требованию теоремы локализации.

1.3. **Строгая $\mathbb{A}^1$-гомотопическая инвариантность tf-локальных объектов.** Введение tf-топологии используется для того, чтобы получить корректные обобщения результатов о гомотопически инвариантных предпучках с (оснащёнными) трансферами, поскольку эта топология аккумулирует квадраты Нисневича над базовыми схемами с совершенными полями вычетов, нестягиваемые с помощью $\mathbb{A}^1$-гомотопий (оснащённых) соответствий, в частности, такие, как квадрат, определённый в Утверждении 1.1. Назовём симплициальный предпдучок tf-локальным, если его значения на tf-квадратах являются гомотопически расслоенными (pullback) квадратами. Главным результатом, доказанным и написанным в отчётный период, является обобщение теоремы о строгой гомотопической инвариантности в терминах tf-локальных предпучков S^1-спектров в предположении, что теорема о строгой гомотопической инвариантности выполнена над полями вычетов базаовой схемы S размерности Крулля 1.

Теорема 1.4. *Пусть* S *– сепарабельная нётерова схема размерности 1, поля вычетов которой удавлетворяют теореме о строго гомотопической инвариантности, например,* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. *Тогда функтор локальной замены по отношению к топологии Нисневича* $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ *на категории* S^1*-спектров симплициальных предпучков* $\mathrm{Pre}^{S^1}(\mathrm{Sm}_S)$ *сохраняет* $\mathbb{A}^1$*-инвариантыне* tf*-локальные квазистабильные оснащённые предпучки, т.е. предпучки с оснащёнными трансферами.*

Ремарка 1.5. Отметим, что всякий предпучок с трансферами по отношению к Cor-соответствиям является квазистабильным оснащённым предпучком.

В терминах предпучков абелевых групп можно сформулировать такую теорему, что если $\mathcal{F}$ – квазистабильный предпучок с оснащёнными трансферами, tf-когомологии которого $H^i_{\mathrm{tf}}(-,\mathcal{F}_{\mathrm{tf}})$, $i \in \mathbb{Z}$, являются $\mathbb{A}^1$-инвариантными, тогда когомологии Нисневича являются $\mathbb{A}^1$-инвариантными. Поскольку, как отмечено выше, tf-топология тривиальна над базовыми схемами нулевой размерности Крулля, то в этом случае в теореме выше условие tf-локальности выполнено тривиально, а предположение об $\mathbb{A}^1$-инвариантности tf-когомологий эквивалентно $\mathbb{A}^1$-инвариантности предпучка. Таким образом, утверждение является обобщением известной ранее теоремы о строгой гомотопической инвариантности со случая поля на случай базовой схемы.

Результат сводит вычисление мотивной замены квазистабильного оснащённого предпучка S^1-спектров к tf-мотивной замене.

Следствие 1.6. *Для базовой схемы* S *как в теореме выше, и всякого квазистабильного оснащённого предпучка* S^1*-спектров имеет место посхемная слабая стабильная эквивалентность*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mot}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}\mathcal{F},$$

где $\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}$ обозначает функтор замены по отношению к $\mathbb{A}^1$-эквивалентностям и tf-эквивалентностям, $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ – по отношению к локальным эквивалентностям в топологии Нисневича, а $\mathcal{L}_{\mathrm{mot}} = \mathcal{L}_{\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}$ – функтор мотивной замены. (В частности, утверждение верно для комплексов предпучков с трансферами на Sm_S.)

В случае базового поля, поскольку, как отмечено выше, tf-топология является тривиальной, tf-мотивная локализация задаётся функтором $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(\Delta^\bullet \times -)$, а tf-мотивная гомотопическая категория – это некая 'наивная' $\mathbb{A}^1$-гомотопическая категория, определяемая локализацией по отношению к $\mathbb{A}^1$-гомотопиям, но без учёта какой-либо нетривиальной топологии на категории схем.

1.4. **Детализированный принцип локализации.** Теорема локализации по типу теоремы 1.3 для некоторого предпучка категорий $\mathcal{C}(-)$, определённых над базовыми схемами, позволяет выводить эквивалентности в категории $\mathcal{C}(S)$ из эквивалентностей в $\mathcal{C}(Z)$ и $\mathcal{C}(S-Z)$, или из эквивалентностей в категориях $\mathcal{C}(k)$ над всеми полями вычетов k схемы S. Теорема локализации для категорий $\mathbf{H}(\mathrm{Sm}_S)$ и $\mathbf{H}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{Sm}_S)$ была использована М. Аюа [6] для доказательства эквивалентности категорий $\mathbf{SH}(S) \simeq \mathbf{SH}^{\mathrm{fr}}(S)$, используя эквивалентность для случая полей $\mathbb{F}_p$ и $\mathbb{Q}$. Однако, поскольку утверждение теоремы локализации касается объектов и диаграмм в мотивных гомотопических категориях, то и утверждения, которые она позволяет таким образом сводить от случая базовой схемы к случаю поля, касаются свойств, определённых с точностью до мотивной эквивалентности в указанных мотивных категориях. Канонический морфизм в следствии 1.6 является (стабильной) мотивной эквивалентностью по определению, а утверждение состоит в том, что это посхемная стабильная эквивалентность. Для доказательства теоремы 1.4 и следствия 1.6 мы производим 'детализацию' принципа локализации и контроль за действием функторов $i^!$, i_*, j_*, j^* на более детальном (жёстком) уровне категорий с точностью до посхемных стабильных эквивалентностей.

Именно, мы рассматриваем (доказываем) следующее усиление теоремы локализации 1.3 для случая $\mathbf{SH}^{S^1,\mathrm{fr}}(-)$. Рассмотрим категорию $\mathrm{SmAff}_{S,Z}$, объектами которой являются схемы вида X^h_Z, где $X \in \mathrm{SmAff}_S$ и X^h_Z обозначает гензелизацию схемы X вдоль $X_Z = X \times_S Z$. $\mathrm{SmAff}_{S,Z}$ находится 'в промежутке' между SmAff_Z и SmAff_S, и мы используем её, чтобы подразбить функторы i_* и $i^!$ из теоремы 1.3. Обозначим через $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(-)$ (гомотопическую) категорию квазистабильных оснащённых предпучков S^1-спектров. Рассмотрим (некоммутативную) диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S) \arrow[dll, "i^!"'] \arrow[dl, "\widetilde{i}^!"] \arrow[dr, "j^*"] & \\
\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_Z) \arrow[r, shift right, "\overline{i}_*"'] \arrow[drr, "i_*"'] & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_{S,Z}) \arrow[l, shift right, "\overline{i}^*"'] \arrow[dr, "\widetilde{i}_*"] & & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_{S-Z}) \arrow[dl, "j_*"] \\
 & & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S) &
\end{tikzcd}$$

в которой

$$\begin{aligned}
&\overline{i}_*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X_Z), && \overline{i}^*\mathcal{F}(Y) \cong \varinjlim_{Y\to X, X\in \mathrm{Sm}_S} \mathcal{F}(X),\\
&\widetilde{i}^!\mathcal{F}(X^h_Z) \cong \mathrm{hofib}(\mathcal{F}(X^h_Z) \to \mathcal{F}(X^h_Z - X_Z)), && \widetilde{i}_*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X^h_Z),\\
&j_*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X \times_S (S-Z)), && j^*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X),\\
&i^! = \overline{i^*}\widetilde{i}^!, && i_* = \widetilde{i}_*\overline{i}_*.
\end{aligned}$$

Теорема 1.7. *Пусть S – сепарабельная нётерова схема размерности 1, такая что над общими точками S выполнена теорема о строгой гомотопической инвариантности, Z – замкнутая подсхема. Тогда выполнено следующее:*

0) *Для всякого tf-локального $\mathcal{F}$ имеет место выделенный треугольник в триангулированной категории $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S)$*
$$\widetilde{i}_*\widetilde{i}^!\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F} \to \widetilde{i}_*\widetilde{i}^!\mathcal{F} \wedge S^1.$$

1) *Функторы* $\overline{i}^*$, $\overline{i}_*$, $\widetilde{i}_*$, $\widetilde{i}^*$, j^*, j_* *сохраняют* $\mathbb{A}^1$*-эквивалентности и* $\mathbb{A}^1$*-инвариантные объекты и Нисневич-локальные эквивалентности и объекты.*
2) *Функторы* $\overline{i}^*$, $\overline{i}_*$ *устанавливают эквивалентность подкатегорий* $\mathbb{A}^1$*-инаврнантных объектов в* $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_Z)$ *и* $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S)$.

Важым результатом для доказательства указанной выше теоремы является тривиальность когомологий $\mathbb{A}^1$-инвариантных квазистабильных аддитивных предпучков с оснащёнными трансферами со значениями в абелевых группах на схемах вида $X^h_x \times_S \eta$ являются общими слоями локальных гензелевых существенно гладких схем.

Теорема 1.8. *Пусть* S *– локальная неприводимая схема размерности Крулля 1, и предположим, что поле вычетов в общей точке* η *удовлетворяет теореме о строго гомотопической инвариантности. Пусть* $X \in \mathrm{Sm}_S$, $x \in X$. *Пусть* $\mathcal{F}$ *–* $\mathbb{A}^1$*-инвариантный квазистабильный оснащённый предпучок на категории* Sm_η. *Тогда*

$$H^i_{\mathrm{nis}}(X^h_x \times_S \eta, \mathcal{F}) = 0, i > 0, H^0_{\mathrm{nis}}(X^h_x \times_S \eta, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X^h_x \times_S \eta),$$

где X^h_x *– локальная гензелева схема в точке* x.

А именно, указанная теорема ипользуется для доказательства сохранения локальных эквивалентностей по отношению к топологии Нисневича под действием $i^!$ и j_*.

2. Публикации и участие в мероприятиях

Теорема 1.4 о (tf-Нисневич) строгой гомотопической инвариантности и сопутствующие (изложенные выше) результаты изложены в статье

Andrei Druzhinin, Håkon Kolderup and Paul Arne Østvær,
Strict $\mathbb{A}^1$*-invariance over the integers*, arxiv:2012.07365,
направленной в журнал Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Также благодарность конкурсу-фонду ММР за поддержку включена в направленную в течении года в журнал статью на близко связанную тему, относящуюся к строгой гомотопической инвариантности над полями k, $\mathrm{char} k = 2$, результат которой используется в статье, приведенной выше.

Andrei Druzhinin, Ivan Panin,
Surjectivity of the étale excision map for homotopy invariant framed presheaves, arXiv:1808.07765.

Другие статьи, напраленные в течении года в журналы, содержат благодарность РНФ. Эти статьи при направлении в журналы имеют благодарность жюри и спонсорам конкурса ММР в рекомендованной совместимой форме:

A. Druzhinin, *Stable connectivity over a base*, arXiv:1911.05014;
A. Druzhinin, *Naive Milnor-Witt K-theory relations in the diagonal of motivic homotopy groups over a base*, arXiv:1809.00087;
A. E. Druzhinin, *Framed motives of smooth affine pairs*, направленной в Journal of Pure and Applied Algebra.

———————

Участник программы Motivic Geometry (CAS Oslo), проводимой в Осло под эгидой Норвежской Академии, https://cas.oslo.no/research-groups/motivic-geometry-article3332-827.html

3. Планируемые результаты и исследования

Выделение tf-топологии ведёт к разделению стабильной мотивной локализации на две составляющие. Рассмотрим разложение функторов мотивной локализации на категориях $\mathbb{G}_m$-спектров комплексов предпучков с трансферами и (би)спектров симплициальных предпучков с оснащёнными трансферами

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spt}_{\mathbb{G}_m}\mathrm{K}(\mathrm{Pre}^{\mathrm{tr}}(\mathrm{Sm}_S)) & \longrightarrow & \mathbf{DM}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{Sm}_S) & \longrightarrow & \mathbf{DM}(\mathrm{Sm}_S); \\ \mathrm{Spt}_{s,t}(\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{Sm}_S)) & \xrightarrow{L_{\text{tf-smot}}} & \mathbf{SH}^{\mathrm{fr}}_{\mathrm{tf}}(\mathrm{Sm}_S) & \xrightarrow{L^{\text{tf-smot}}_{\text{smot}}} & \mathbf{SH}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{Sm}_S), \end{array}$$

$L^{\text{tf-smot}}_{\text{smot}} = L^{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1,S^1,\mathbb{G}_m}_{\mathrm{nis},\mathbb{A}^1,S^1,\mathbb{G}_m}$, $L_{\text{tf-smot}} = L_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1,S^1,\mathbb{G}_m}$.

Применительно к фунтору $L^{\text{tf-smot}}_{\text{smot}}$ теория мотивов Воеводского или оснащённых мотивов над полем влечёт, что он дейтсвует так же как функтор Нисневич-локальной замены, и как следствие сохраняет Нисневич-локальную гомотопическую t-структуру. Предполагается, что указанные свойства правого функтора $L^{\text{tf-smot}}_{\text{smot}}$ выполнены также и в отностельном случае над базовой схемой, в то время как левый $L_{\text{tf-smot}}$ обладая сравнительно простыми с абстрактной точки зрения свойствами в случае базового поля изначально, меняет их и включает в себя указанные выше в разделе 1.1 дефекты, выраженные сдвигом посхемной гомотопической t-структуры в относительном случае базовой на размерность Крулля.

Ближайшим планом в развитии проекта является применение уже имеющегося метода, описанного в теореме 1.7 для случая S^1-спектров, к случаю (s,t)-биспектров и также для $\mathbb{P}^1$-спектров. Это позволит доказать указанные выше результаты о функторе $L^{\text{tf-smot}}_{\text{smot}}$ и свести вычисление стабильной мотивной замены к стабильной tf-мотивной замене (и Нисневич-локализации) для указанного в теореме 1.7 класса схем.

Теорема 3.1. *Для базовой схемы S размерности 1, поля вычетов которой удовлетворяют теореме о строгой гомотопической инвариантности, для всякого квазистабильного оснащённого предпучка S^1-спектров имеет место посхемная слабая эквивалентность*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{smot}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1,S^1,\mathbb{G}_m}\mathcal{F},$$

где $\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}$ обозначает функтор замены по отношению к $\mathbb{A}^1$-эквивалентностям и tf*-эквивалентностям, $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ – Нисневич-эквивалентностям, а $\mathcal{L}_{\mathrm{mot}} = \mathcal{L}_{\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}$ – функтор мотивной замены (В частности, утверждение верно для комплексов предпучков с трансферами на* Sm_S*).*

Следствие 3.2. *Функтор $L^{\text{tf-smot}}_{\text{smot}}$ сохраняет гомотопическую t-структуру. Функтор L_{smot} сдвигает Нисневич-локальную гомотопическую t-структуру не более чем $L_{\text{tf-smot}}$ сдвигает посхемную гомотопическую t-структуру.*

В процессе написания находится текст D., *Nisnevich localisation of tf-motivic framed spectra.*

Дальнейшим в направлении вычисления пучков мотивных гомотопических групп является исследование tf-мотивной локализации. Также направлением исследования является доказательство указанных выше утверждений для схем произвольной размерности Крулля.

Список литературы

[1] J. Ayoub. "La r´ealisation ´etale et les op´erations de Grothendieck". в: *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup´er.* 47.1 (2014), с. 1—145.

[2] Joseph Ayoub. "Un contre-exemple à la conjecture de A1-connexité de F. Morel". в: *Comptes Rendus Mathematique* 12 (June 2006), с. 943—948.

[3] Denis-Charles Cisinski и Frédéric Déglise. *Triangulated Categories of Mixed Motives.* Springer Monographs in Mathematics, 2019.

[4] Grigory Garkusha и Ivan Panin. *Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky).* To appear in *J. Am. Math. Soc.* 2018. arXiv: 1409.4372.

[5] Grigory Garkusha и Ivan Panin. "Homotopy invariant presheaves with framed transfers". в: *Cambridge Journal of Mathematics* 8.1 (2020), с. 1—94.

[6] Marc Hoyois. *The localization theorem for framed motivic spaces.* To appear in *Compos. Math.* 2018. arXiv: 1807.04253.

[7] Fabien Morel. "The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems". в: *K-Theory* 35.1-2 (2005), с. 1—68. ISSN: 0920-3036. DOI: 10.1007/s10977-005-1562-7. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10977-005-1562-7.

[8] Fabien Morel и Vladimir Voevodsky. “$\mathbb{A}^1$-homotopy theory of schemes”. в: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 90 (1999), 45—143 (2001). ISSN: 0073-8301. URL: http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1999__90__45_0.

[9] Vladimir Voevodsky. “Cohomological theory of presheaves with transfers”. в: *Cycles, transfers, and motivic homology theories.* т. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, с. 87—137.

[10] Vladimir Voevodsky. *Notes on framed correspondences.* 2001.

[11] Vladimir Voevodsky. “Triangulated categories of motives over a field”. в: *Cycles, transfers, and motivic homology theories.* т. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, с. 188—238.