Отчёт 2022 по проекту
«Оснащённые мотивы над Spec $\mathbb{Z}$»,
основной результат:
Обобщение результатов для базовых схем старших размерностей.

1. Достигнутые результаты

Одной из форм, в котрой предстаёт фундаментальный предмет исследования мотивной теории гомотопий, является вычисление фибрантных замен в инъективных модельных структурах. Это какбы является категорной формой и формально предыдущим шагом по отношению к вычислению мотивных гомотопических групп. В стабильном случае вычисление фибратных замен подразумевает распетливание или вычисления Ω-сперов, и, в частности, включает в себя вычисление пространств бесконечность петель.

Имеет место универсальное вычисление опианного типа основанное на технике трансферов. А именно, применительно к категории мотивов $\mathbf{DM}(k)$ над совершенным полем такие вычисления в своей основе содержит подход и техника статей Воеводского [8], [6]. Неопубликованные заметки [7] предлагают такой поход к стабильной мотивной гомотопической категории Воеводского $\mathbf{SH}(k)$. Этот подход был реализован позднее в теории оснащённых мотивов Гаркуши и Панина [5] сначала для совершенного бесконечного поля нечётной характеристики. Над конечными полями теоремы были доказаны полями благодаря [2] и [4]. В совместной статье Панина и автора [3] было снято предположение на характеристику. Статья [1] покрыла случай произвольного поля, раширив одновременно общность оригинальной теории Воеводского для категории $\mathbf{DM}(k)$.

В то время как конструкия и анализ категории $\mathbf{DM}(k)$ в [8], [6] основанны на рассмаотени предпучков с трансферами, т.е. предпучков на категории Cor_k, для исследования стадильной мотивной гомотопиской категории используются оснащённый соответствия Воеводского [7]. При этом как и соответствия Cor_k оснащённые соответствия корректно определны над произвольной базовой схемой. Более того как показано в [7, 5, 4] базовая лемма Воеводского связывающая их с мотивными сферами выполняется по крйней мере над произволной нёторовой отделеимой схемой B. Однако как было обяснено в предыдущих отчётах выводы и результаты теории не выполняются в общем случае над схемами положительной размерности. В ходе выполнения проекта ранее был развит, писанный в предыдущих отчётах, метод переноса техники оснащённых соответствий на случай базовых схем. Полученные результаты использовали предположение на базовую схему, котрое было доказан только для схем размерности один. В течении отчётного периода результаты были доказаны для всех сепарабельных нётеровых схем.

А именно, ключевым утверждением, на котором базируется цепь аргументов, и доказательство которого требовало предполажения что $\dim B = 1$, является следующая теорма, утверждающая коротоко говоря тривиальность старших когомологий стабильно оснащённых предпучков абелевых групп на слоях логальных гладких гензелевых схем.

Теорема 1.1. *Пусть $\eta \in B$ произвольная точка схемы B конечной размерености Крулля. Пусть U сщуественно гладкая локальная гензелева схема над B. Тогда имеет место изоморфизм градуированных групп $H^*_{\mathrm{nis}}(U \times_B \eta, F_{\mathrm{nis}}) = F(U \times_B \eta)$, где правая сторона обозначает градуированную группу сконцентруированную с степени 0, для всякокго стабильно оснащённого предпучка абелевых групп F над B.*

Случай когда η – замкнутая точка является следствием ранее известеного результата над полями из оригинальой работы Гаркуши и Панина [5] и работы Воеводского [6]. Случая, когда размрность замыкания η в B является 1, следует из раультата доказанного ранее в ходе выполнения исследования. Доказательство общего утверждения для произвольной конечномерной схемы B и η испльзовало существенно новый геометрический подход. А именно, были введены и использованны обощения фундаменталного понятия оснащённых соответствий, что позволоило сформулировать индукционный переход. Таким образом по сути было получно альтернотвиное и более сильное доказательство и для одномерного случая. Поученные консрукии применимы для дальнейших исследований, а имеено к более общему случаю локальных гладких схем, не являющихся негензелевыми, что представляет самостоятельную ценность и имеет дальнейшие применения.

Кроме того в отчётный период было получено следующее полезное утверждение дающее явную костурцию для копределов функтороы вида $\mathcal{F}(\Delta^\bullet \times -)$, где $\mathcal{F}$ – предпучёк множеств.

Предложение 1.2. *Имеет место каноническое тривиальное расслоение*

$$\mathrm{hocolim}^{\Delta_{B,Z}}_{Y/\mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_{B,Z}}(X^h_Z) \to \mathrm{hocolim}^{\Delta_Z}_{Y/\mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_Z}(X_Z), \tag{1.1}$$

для любого $X \in \mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_B$, $Y \in \mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_Z$. Здсь X^h_Z и X_Z рассматриваются как представимые предпучки на $\mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_{B,Z}$ и $\mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_Z$, соответственно, и используем обозначение

$$(\mathrm{hocolim}^{\Delta_{B,Z}}_{\mathcal{C},\mathbf{X}} \mathcal{F})_n := \coprod_{\alpha \in N(\mathcal{C})_n} \mathcal{F}(\mathrm{Cyl}^{B,Z}_{\mathcal{C}} \mathbf{X}(\alpha)). \tag{1.2}$$

где функтор $\mathbf{X}\colon \mathcal{C} \to \mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_{B,Z}$ применён к симплексам $N(\mathcal{C})_n = \mathrm{sSet}(\Delta^n, N(\mathcal{C}))$ в категории $\mathcal{C}$. Аналогичный результат имеет место для категорий $\mathrm{Fr}_+(\mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_{B,Z})$ и $\mathrm{Fr}_+(\mathrm{Sm}^{\mathrm{cci}}_Z)$.

А именно, с помощью этого утверждения в нашем исследовании получена формула для фукнтора $\overline{i}^*$ в диаграмме (1.3), доказаны свойства в Теореме 11.4(1) ниже.

1.1. **Главные результаты.** Ниже приведён список формулировок результатов, доказанных ранее в ходе выполнения пректа для одномерных базовых схем, общность которых была расширена.

Теорема 1.3. *Пусть S – сепарабельная нётерова схема. Тогда функтор локальной замены по отношению к топологии Нисневича $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ на категории S^1-спектров симплициальных предпучков $\mathrm{Pre}^{S^1}(\mathrm{Sm}_S)$ сохраняет $\mathbb{A}^1$-инвариантыне tf-локальные квазистабильные оснащённые предпучки, т.е. предпучки с оснащёнными трансферами.*

Следствие 1.4. *Пусть S – сепарабельная нётерова схема. Для всякого квазистабильного оснащённого предпучка S^1-спектров имеет место посхемная слабая стабильная эквивалентность*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{mot}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}\mathcal{F},$$

где $\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}$ обозначает функтор замены по отношению к $\mathbb{A}^1$-эквивалентностям и tf-эквивалентностям, $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ – по отношению к локальным эквивалентностям в топологии Нисневича, а $\mathcal{L}_{\mathrm{mot}} = \mathcal{L}_{\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}$ – функтор мотивной замены. (В частности, утверждение верно для комплексов предпучков с трансферами на Sm_S.)

Рассмотрим категорию $\mathrm{SmAff}_{S,Z}$, объектами которой являются схемы вида X^h_Z, где $X \in \mathrm{SmAff}_S$ и X^h_Z обозначает гензелизацию схемы X вдоль $X_Z = X \times_S Z$. $\mathrm{SmAff}_{S,Z}$ находится 'в промежутке' между SmAff_Z и SmAff_S, и мы используем её, чтобы подразбить функторы i_* и $i^!$ из теоремы 1.5. Обозначим через $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(-)$ гомотопическую категорию квазистабильных оснащённых предпучков S^1-спектров. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S) \arrow[lld, "i^!"'] \arrow[ld, "\widetilde{i}^!"] \arrow[rd, "j^*"] & \\
\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_Z) \arrow[r, shift right, "\overline{i}_*"'] \arrow[rrd, "i_*"'] & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_{S,Z}) \arrow[l, shift right, "\overline{i}^*"'] \arrow[rd, "\widetilde{i}_*"] & & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_{S-Z}) \arrow[ld, "j_*"] \\
 & & \mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S) &
\end{tikzcd} \tag{1.3}$$

которая не является в общем случае коммутативной, в которой

$$\begin{array}{ll}
\overline{i}_*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X_Z), & \overline{i}^*\mathcal{F}(Y) \cong \varinjlim_{Y \to X, X \in \mathrm{Sm}_S} \mathcal{F}(X), \\
\widetilde{i}^!\mathcal{F}(X^h_Z) \cong \mathrm{hofib}(\mathcal{F}(X^h_Z) \to \mathcal{F}(X^h_Z - X_Z)), & \widetilde{i}_*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X^h_Z), \\
j_*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X \times_S (S-Z)), & j^*\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(X), \\
i^! = \overline{i^*}\widetilde{i}^!, & i_* = \widetilde{i}_*\overline{i}_*.
\end{array}$$

Теорема 1.5. *Пусть S – сепарабельная нётерова схема, Z – замкнутая подсхема. Тогда выполнено следующее:*

0) *Для всякого* tf*-локального* $\mathcal{F}$ *имеет место выделенный треугольник в триангулированной категории* $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S)$
$$\widetilde{i}_*\widetilde{i}^!\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to j_*j^*\mathcal{F} \to \widetilde{i}_*\widetilde{i}^!\mathcal{F} \wedge S^1.$$
1) *Функторы* $\bar{i}^*$, $\bar{i}_*$, $\widetilde{i}_*$, $\widetilde{i}^*$, j^*, j_* *сохраняют* $\mathbb{A}^1$*-эквивалентности и* $\mathbb{A}^1$*-инвариантные объекты и Нисневич-локальные эквивалентности и объекты.*
2) *Функторы* $\bar{i}^*$, $\bar{i}_*$ *устанавливают эквивалентность подкатегорий* $\mathbb{A}^1$*-инавриантных объектов в* $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_Z)$ *и* $\mathrm{Pre}^{\mathrm{fr}}(\mathrm{SmAff}_S)$.

Теорема 1.6. *Пусть B – нётерова отделимая схема конечной размерности Крулля удовлетворяющая предположениям перечисленным в разделе* **??**. *Имеет место естественная почленная эквивалентность би-спектров симплоициальных предпучков*
$$\mathcal{L}_{S^1,\mathbb{G}_m,\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}(\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m} Y) \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}(\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m}\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}\mathrm{Fr}(-,\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m} Y))^{\mathrm{gp}}.$$
Имеет место естественная почленная эквивалентность $\mathbb{P}^1$*-спектров симплоициальных предпучков*
$$\mathcal{L}_{S^1,\mathbb{G}_m,\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1} Y) \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}\mathrm{Fr}(-,\Sigma^\infty_T Y))^{\mathrm{gp}},$$
где T-спектр расположенны й с правой стороны рассматривается как $\mathbb{P}^1$*-спектр в виду канонического морфизма мотивных престранств* $\mathbb{P}^1/\infty \to \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m = T$.

2. Публикации и участие в мероприятиях

Слудеющая статья с благодарностью гранту-конкурсу ММР за финансовую поддержку принята в печать:

1) Druzhinin A.E., Panin I.A., Surjectivity of the etale excision map for homotopy invariant framed presheaves, принята в печать в Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics;

Также на протяжении отчётного периода были приняты в печать слдующие статьи, которые содержат благодарности ММР по фоме совмстимой с РНФ:

2) Druzhinin A.E., Stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorem over a base, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 2022, no. 792, 2022, pp. 61-91. https://doi.org/10.1515/crelle-2022-0048.
3) Druzhinin A.E., Motivic Rigidity for Smooth Affine Henselian Pairs over a Field, International Mathematics Research Notices, August 2022; rnac221, https://doi.org/10.1093/imrn/rnac221;
4) Дружинин А.Э., Комплекс Кузена на дополнении к дивизору со строго нормальными пересечениями в локальной существенно-гладкой схеме над полем, принята в печать в Математический Сборник.

В отчётный период была произведена большая переработка первой оснвной статьи, (1) ниже, которая сменила название на "The trivial fiber topology and framed motives over the integers". Таже последовало соответствующее редактирование второй основной статьи, (2) ниже, а её название было изменено на "Motivic infty $\mathbb{P}^1$-loop spaces of pairs over base schemes.". Ранее статьи были выложен как препринты:

1) Andrei Druzhinin, Håkon Kolderup and Paul Arne Østvær,
Strict $\mathbb{A}^1$*-invariance over the integers*, arxiv:2012.07365,
направленной в журнал Journal für die reine und angewandte Mathematik.
2) Druzhinin, Trivial fibre motivic decomposition over integers and framed motives,
http://arxiv.org/abs/2112.07565

Указанные основные статьи по проекту пока ещё не были опубликованы или приняты к печати.

Результаты полученные в очётном периоде, а катже ранее в ходе исследовния, были вклюены и представлены в следующем перечене доклаов, первый из которых выполнен соавтором автора:

- Hootopy inariance and erset coplees oer base schemes, конференция Harnessing motivic invariants, Эссен, июнь 2022.

и ниже-следующие доклады были выпоненые самим автором:

- Доклад «Strict homotopy invariance and homotopy-logical diagrams», конеференция «Motivic Geometry Conference», University of Oslo, август 2022.
- Доклад "Гладкие модели мотивных спектров"на 2-ой конференции Математических Центров России, МИАН, Москва, ноябрь 2022.
- Доклады на семинарах в Математическом Институте им. А. Эйнштейн, Иерусалим, октябрь-ноябрь 2022:
  "Presentations of the motivic loops over one-dimensional base schemes доклад перед группой семинара по теории гомотопий, 24.10.2022,
  "Motives, cohomology theories, and moving lemmas base доклад на семинаре "Special AG & NT seminar 3.11.2022.

Список литературы

[1] Andrei Druzhinin. *Strict $\mathbb{A}^1$-invariance theorem with integral coefficients over fields*. arXiv: 2108 . 01006v2.

[2] Andrei Druzhinin и Jonas Irgens Kylling. *Framed motives and zeroth stable motivic homotopy groups in odd characteristic*. 2018. arXiv: 1809.03238.

[3] Andrei Druzhinin и Ivan Panin. *Surjectivity of the étale excision map for homotopy invariant framed presheaves*. 2018. arXiv: 1808.07765.

[4] Elden Elmanto и др. *Motivic infinite loop spaces*. to appear in CJM. 2018. arXiv: 1711.05248.

[5] Grigory Garkusha и Ivan Panin. “Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)”. В: *Journal of the American Mathematical Society* 34 (2021), с. 261—313. DOI: 10.1090/jams/958.

[6] Vladimir Voevodsky. “Cohomological theory of presheaves with transfers”. В: *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. Т. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, с. 87—137.

[7] Vladimir Voevodsky. *Notes on framed correspondences*. 2001.

[8] Vladimir Voevodsky. “Triangulated categories of motives over a field”. В: *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. Т. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, с. 188—238.