Отчёт 2021 по проекту
«Оснащённые мотивы над Spec $\mathbb{Z}$»,
основной результат:
Разложение стабильной мотивной локализации на tf-часть и Нисневич локализацию.

1. Достигнутые результаты

Одним из результатов проведённого исслодрвания является полученный контр-пример к теореме сокращения для произвольной базовой схемы положительной размерности Крулля, см. Proposition 1.2. Это свидетельтвует об отсутвии эквивалентности мотивной гомотопичкской категории гпрупповых оснвщённых мотивных пространств $\mathbf{H}^{\mathrm{fr}}(B)$ и категории очень эффективнх мотивных спетров $\mathbf{SH}^{\mathrm{veff}}(B)$, и не справедливости в категориях для таких B формул мотивной локализации и описания слайс фильтрации предоставляемых теорией оснащённых мотивов [3, 5, 6, 2]. Более того, контр-пример спаведлив для случая Cor-соответсвий, и показывает неэкививалентность подкатегории эффективных мотивов $\mathbf{DM}^{\mathrm{eff}}(B)$ и $\mathbb{A}^1$-локализации произодной категории пучков Нисневича с трансферами, которая выполняется в случае справедливости теорем теории Воеводского [10]. В отличае от полученного в предыдущем отчётном периоде контр-примера к теореме о сторго гомотопической инвариантности [4, 9] не справедливость теоремы сокращения в указанной выше форме демонстрирует не только не выполнение общей картины и схемы рассуждений указанны теорий в дословной форме, но и о качественном различае структуры указанных категорий и мтоивных групп гомологий/гомотопий в нульмерном и многомерном случае базовой схемы. Ранее контр-пример к теореме сокращения был построен Айубом для части базовых схем, размернось которых стартавала с двойки.

Отметим, что есть другая, в такой же мере известная блегодаря Айубу, отличительная особенность случая произвольной базовой схемы B по сравнению со случаем поля в совйствах мотивных гомологий и гомотопий мотивных пространств и категории мотивов Воеводского $\mathbf{DM}(B)$ а также стабильной мотивной гомотопической категории $\mathbf{SH}(B)$. Эта особенность состоит в наличии отрицательных мотивных гомологических и гомотопических групп. Другими словами это выражается в сдиге Нисневич-локальной гомотопической t-стурктуры на катеории мотивных би-спктров симплициальных пучков Нисневича индуцированной гомотопической t-структурой на категории S^1-спектров симплициальных множеств. Для случая базового полея k стабильная $\mathbb{A}^1$-мотивная локализация сохраняет Нисневич локальную гомотопическую t-структуру, что эквивалентно означает обнуление всех пучков мотивных гомолоий и гомотопических групп гладких схем на категории Sm_k. Для случая пучков мотивных гомолоий над совершенным полем это было известно как следствие фундаментальных результатов Воеводского [10, 9, 8]; для пучков мотивных гомотопичских групп произвольным полем это – утверждение стабильной теоремы связности Мореля [7]. Контр-пример Айуба [1] оправергает справедливость такого же утверждения в общем случае как для $\mathbf{DM}(B)$ так и для $\mathbf{SH}(B)$, и скорректированная уже известная теорема утверждает, что сдвиг гомотопической t-структуры ограничен размерностью Крулля базовой схемы B.

При придположении свойств базовой схемы указанных в разделе 1.2 и доказанных в настоящий момент для схем резмерности 1 пролучены результаты позволяющие объяснить это поведение, направленные на выявление его природы и вычисление групп гомотопий гладких схем. Получено разложение функтора стабильной мотивной локализации на составляющие, одна из которых концентрирует отличительные указанные особенности случая базовой схемы положительной размерностей в более простом и доступном виде, а другая сохраниеят свойства при переходе к случая базовой схемы от случая поля. А именно, см. Theorem 1.3, на категории би-спектров предпучков снабжённых стабильными оснащёнными трансферами функтор локализации или эквивалентно функтор стабильной мотивной фибратной замены в инъективной модельной сруктуре представляется в виде композиции

$$\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{nis}} \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}, \tag{1.1}$$

такой что $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}$ концентррует сдвиг, а $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ сохраняет Нисневич локальную гомотопическую t-структуру. Более того в отличае от оригинального функтора $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{nis}}$ фунтор $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}$ имеет ограничесннй сдвиг гомотопической t-структуры на категори предпучков, т.е. имеет место обнуление предпучков гомотопических групп

$$\pi_l \mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}(Y) = 0, l < -\dim B, Y \in \mathrm{Sm}_B,$$

в то время как для $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{nis}}$ обнуление справедливо только Нисневич-локально. Это формально уже демонтрирует, что $\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}(Y)$ имеет более простые структурные свойства по сравнению со случаем топологии Нисневича, является с абстрактной точки зрения более простым для вычисления, в планах исследования поиск явного выражения для этого функтора. В свою очередь функтор $\mathcal{L}_{\mathrm{nis}}$ в разложение не только сохраняет Нисневич локальную гомотопическу t-структуру, но и не меняет ростки стабильных мотивных гомотопических групп на локальнх гензелевых схемах. Таким образом вычисление ассоциированных пучков Нисневича стабильных мотивных гомтопичесикх групп произвольного мотивного би-спектра $\mathcal{Y}$ сведено к вычислению стабильой tf $\mathbb{A}^1$-мотивной локализации оснащённого расширения Кана. Отметим также, что имеет место выражение через нестабильную tf $\mathbb{A}^1$-мотивную локализацию, вычисление которой является одим из дальнейших шагов

$$\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,S^1,\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}} \simeq \mathcal{L}_{\mathbb{G}_m}\mathcal{L}_{S^1}\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}.$$

Из разложения (1.1) при техже предположениях на B выведены также формулы для T-спектра и $\mathbb{P}^1$-спектра, и получены выражения для ∞-простврвства петель гладких схем Y и мотивных пространств Y/U. Одна из доказанных слабых эквивалентностей симплициальных пространств ростков пространства петель позволяет получить представление младшей стабильной мотивной гомотопической группы мотивного пространства Y/U для произвольной гдакой схемы Y над B и открытыой подсхемы U в терминах образующих и соотношений параметризованных счётным числом явных алгеброгеометрических данных и условий. Для того чтобы получить указанные представления T и $\mathbb{P}^1$-спектров и пространства петель использован ещё однин доказанный в очётный период результат – теорема о конусе для случая проивзольной пары Y/U заданной гладкой схемой Y и открытыой подсхемы U над произвольной базовой сземой B; отметим, что доказательство упомянутой теоремы о конусе является униерсвльным и применимо к произвольной базовой схеме B.

1.1. Контрпример к теореме сокращения в случае базовой схемы.

Лемма 1.1. *Пусть B – локальная схема, $z \in B$ – замкнутая точка. Тогда $H^1_{\mathrm{nis}}(B \times \mathbb{G}_m, \mathcal{F}) \neq 0$ для некоторого $\mathbb{A}^1$-гомотопически инвариантного предпучка с трансферами $\mathcal{F}$.*

Рассмотрим функторы

$$D(\mathrm{Shv}^{\mathrm{tr}}(B))[w_{\mathbb{A}^1}^{-1}] \to \mathbf{DM}(B) \tag{1.2}$$

$$\Omega_{\mathbb{G}_m}: D(\mathrm{Pre}^{\mathrm{tr}}(B))[w_{\mathbb{A}^1}^{-1}] \to D(\mathrm{Pre}^{\mathrm{tr}}(B))[w_{\mathbb{A}^1}^{-1}] \tag{1.3}$$

Предложение 1.2. *Пусть B – нётерова отделимая схема положительной конечной размерности Крулля. Тогда функтор Equation* (1.3) *не сохраняет Нисневич-локльные эквивалентности, фунтор* (1.2) *не является вложением категорий.*

1.2. Предположения на базовую схему.

Нижеследующие теоремы 1.3 и **??** доказаны при для базовых схем, таких что

- (1) Над полями вычетов базовой схемы B имеет место теорема о строгой гомотопической инвариантности.
- (2) Для всякой точки $\eta \in B$ и сщуественно гладкой локальной гензелевой U над B когомологии стабильно оснащённых предпучков абелевых групп тривиальны на схеме $U \times_B \eta$, т.е $H^*_{\mathrm{nis}}(U \times_B \eta, F_{\mathrm{nis}}) = F(U \times_B \eta)$.

1.3. Разложение стабильной мотивной локализации.

Теорема 1.3. *Пусть B – нётерова отделимая схема конечной размерности Крулля удовлетворяющая предположениям перечисленным в разделе 1.2. Имеет место естественная почленная эквивалентность би-спектров симплоициальных предпучков*

$$\mathcal{L}_{S^1,\mathbb{G}_m,\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}(\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m} Y) \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}(\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m}\mathcal{L}_{\mathbb{G}_m,\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}\mathrm{Fr}(-,\Sigma^\infty_{S^1,\mathbb{G}_m} Y))^{\mathrm{gp}}.$$

Имеет место естественная почленная эквивалентность $\mathbb{P}^1$-спектров симплоициальных предпучков

$$\mathcal{L}_{S^1,\mathbb{G}_m,\mathrm{nis},\mathbb{A}^1}(\Sigma^\infty_{\mathbb{P}^1}Y) \simeq \mathcal{L}_{\mathrm{nis}}(\mathcal{L}_T\mathcal{L}_{\mathrm{tf},\mathbb{A}^1}\mathrm{Fr}(-,\Sigma^\infty_T Y))^{\mathrm{gp}},$$

где T-спектр расположенны й с правой стороны рассматривается как $\mathbb{P}^1$-спектр в виду канонического морфизма мотивных престранств $\mathbb{P}^1/\infty \to \mathbb{A}^1/\mathbb{G}_m = T$.

1.4. **Пространство ∞-петель.**

Теорема 1.4. *Пусть B – схема удовлетворяющая аксиомам перечисленным в разделе 1.2. Пусть $Y \in \mathrm{Sm}_S$, тогда пространство ∞-петель в $\mathrm{Shv}_\bullet(\mathrm{Sm}_S)$ мотивного надстроичного спектра Y в категори $\mathbf{SH}(S)$ локально эквивалентно в топологии Нисневича следующим симплициальным предпучкам*

$$\begin{array}{llll} \varinjlim_l & \Omega^l_{\mathbb{G}_m^{\wedge 1}} & (\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}} & \mathrm{Fr}(Y\wedge\mathbb{G}_m^{\wedge l}))^{\mathrm{gp}} \quad \simeq \\ \varinjlim_l & \Omega^l_{\mathbb{G}_m^{\wedge 1}\wedge S^1} & \mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}} & \mathrm{Fr}(Y\wedge T^{\wedge l}) \quad \simeq \\ \varinjlim_l & \Omega^l_{\mathbb{G}_m^{\wedge 1}\wedge\Delta^1_S/\delta\Delta^1_S} & \mathcal{L}_{\mathrm{tf}} & \mathrm{Fr}(Y\wedge T^{\wedge l}) \quad \in \mathrm{Shv}_\bullet(\mathrm{Sm}_S), \end{array} \tag{1.4}$$

где $\mathrm{Fr}(Y) = \mathrm{Fr}(-,Y)$ – предпучок оснащённых соответствий в смысле [3].

Ремарка 1.5. Указанная теорема влечёт, что функтор $\Omega^\infty_{\mathbb{G}_m}\colon \mathbf{DM}(S) \to \mathbf{D}(\mathrm{Shv}^{\mathrm{Ab}}_{\mathrm{nis}}(\mathrm{Cor}_S))$ переводит мотив гладкой схемы Y в комплекс который Нисвнич-локально эквивалентен следующему комплексу

$$\varinjlim_l \Omega^l_{\mathbb{G}_m^{\wedge 1}}\mathcal{L}_{\mathbb{A}^1,\mathrm{tf}}(\mathbb{Z}_{\mathrm{tr}}(Y\wedge\mathbb{G}_m^{\wedge l})) \in \mathbf{D}(\mathrm{Shv}^{\mathrm{Ab}}_{\mathrm{nis}}(\mathrm{Cor}_S)).$$

1.5. **Тоерема о конусе.**

Теорема 1.6. *Для всякой гладкой схемы $Y \in \mathrm{Sm}_B$ и открытой подсхемы $U \subset Y$ канонический морфизм $\mathrm{Fr}(X)/\mathrm{Fr}(U) \to \mathrm{Fr}(\langle X/U\rangle)$ является мотивной эквивалнтностью.*

2. Публикации и участие в мероприятиях

Результаты доказаны и изложены в следующем препринте

Druzhinin, Trivial fibre motivic decomposition over integers and framed motives, http://arxiv.org/abs/2112.07565

Указанные выше результаты вместе с результатами предыдущего года вошли в сделанный в этом отчётном периоде доклад

Andrei Druzhinin: Strict A1-invariance over the integers, (jt.w. H. Kolderup and P. A. Østvær), 17 февраля 2021, 16:00 CET, в рамках программы Motivic Geometry, проводимой в Осло организацией CAS под эгидой Норвежской Академии,
`https://sites.google.com/view/motivic-geometry-seminar/home`,
`https://www.youtube.com/watch?v=z8P8724SftU`.

Ранее указанные в предыдущем отчёте два препринта с поддержкой премии Молодая Математика России на настоящий момент пока не были приняты в журналах.

С поддержой РНФ и упоминанием болагодарности спонсторам и жури конкурса-премии Молодая Математика России приведём следующие две статьи одна из которых вышла в журнале и другая была принятя в печать.

A. E. Druzhinin, *Framed motives of smooth affine pairs*, вышла в Journal of Pure and Applied Algebra;
A. Druzhinin, *Naive Milnor-Witt K-theory relations in the diagonal of motivic homotopy groups over a base*, принята в журнал Annals of K-theory.

3. Планируемые результаты и исследования

В следующей работе по проекту планируется снять ограничительное предположение на поле. Планируется к качестве ращвития и приложения исследования доказать результат о комплексе Кузина над базовыми схемами теорий когомологий представимых в стабильной мотивной гомотопическоц категории Млреля-Воеводского. Этот результат обощает известные результаты о комплексе Герстнеа К-теории над к. д. н. в направлении расширения класса теорий когомологий и в направлении типа базовых схем, для этого планируется установить точность в столбцах би-комплекса посредством построения в случае базовой схемы произвольный конечный размерностей оснащённых гомотопий ранее построенных для одномерного случая.

Теорема 3.1. *Утверждения теорем Theorem 1.3 справедливы для произвольной схемы B конечной размерности Крулля.*

Теорема 3.2. *Пусть B-схема, и $\eta \in B$ – точка конечно коразмерности Крулля. Пусть U – локальная существенно гладкая схема над B, и ν - обозначает общую точку $U \times_B \eta$. Для всякого $\mathbb{A}^1$-гомотопически инвариантного предпучка абелевых групп с оснащёнными транстферами $\mathcal{F}$ на Sm_η имеет метсто инъективность отображения $\mathcal{F}(U \times_B \eta) \to \mathcal{F}(\nu)$.*

Теорема 3.3. *Пусть B – схема конечной размерности Крулля. Для всякого $\mathbb{A}^1$-гомотопически инвариантного предпучка S^1-спектров на Sm_B и существенно гладкой локальной схемы U над B имеет место канонический квази-изоморфизм комплексов*

$$\cdots \to 0 \to \bigoplus_{x\in(U)^0} \pi_l\mathcal{F}_x(U) \to \cdots \bigoplus_{x\in(U)^c} \pi_{l-c}\mathcal{F}_x(U) \to \cdots \bigoplus_{x\in(U)^{\dim U}} \pi_{l-\dim U}\mathcal{F}_x(U) \to 0 \to \dots \tag{3.1}$$

и

$$\cdots \to 0 \to \bigoplus_{z\in(B_\sigma)^0} \pi_l\mathcal{F}_{z\times_B U}(U) \to \cdots \bigoplus_{z\in(B_\sigma)^c} \pi_{l-c}\mathcal{F}_{z\times_B U}(U) \to \cdots \bigoplus_{z\in(B_\sigma)^{\mathrm{codim}_B \sigma}} \pi_{l-\dim U}\mathcal{F}_{z\times_B U}(U) \to 0 \to \dots,$$

где B_σ – локальная схема схемы B в точке σ являющейся образом замкнутой точки U под действием канонического тотображения $U \to B$, а $\mathcal{F}_Y(X)$ обозначает $\mathrm{hofib}(\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X-Y))$. В частности, и как следствие, утверждение справедливо для мотивных спетров $\mathcal{F} \in \mathbf{SH}(B)$ в стабильной мотвиной гомотопической категории Мореля Воеодского.

Следствие 3.4. *Число ненулевых когомологий комплекса* (3.1) *включая группу в позиции* 0 *ограничено* $\dim B + 1$.

Список литературы

[1] Joseph Ayoub. "Un contre-exemple à la conjecture de A1-connexité de F. Morel". В: *Comptes Rendus Mathematique* 12 (June 2006), с. 943—948.

[2] Elden Elmanto и др. *Motivic infinite loop spaces.* to appear in CJM. 2018. arXiv: 1711.05248.

[3] Grigory Garkusha и Ivan Panin. "Framed motives of algebraic varieties (after V. Voevodsky)". В: *Journal of the American Mathematical Society* 34 (2021), с. 261—313. DOI: 10.1090/jams/958.

[4] Grigory Garkusha и Ivan Panin. "Homotopy invariant presheaves with framed transfers". В: *Cambridge Journal of Mathematics* 8.1 (2020), с. 1—94.

[5] Grigory Garkusha и Ivan Panin. *The triangulated categories of framed bispectra and framed motives.* arXiv: 1809.08006.

[6] Grigory Garkusha, Ivan Panin и Paul Arne Østvær. *Framed motivic Γ-spaces.* 2019. arXiv: 1907.00433.

[7] Fabien Morel. "The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems". В: *K-Theory* 35.1-2 (2005), с. 1—68. ISSN: 0920-3036. DOI: 10.1007/s10977-005-1562-7. URL: http://dx.doi.org/10.1007/s10977-005-1562-7.

[8] Vladimir Voevodsky. "Cancellation theorem". В: *Doc. Math.* Extra vol.: Andrei A. Suslin sixtieth birthday (2010), с. 671—685. ISSN: 1431-0635.

[9] Vladimir Voevodsky. "Cohomological theory of presheaves with transfers". В: *Cycles, transfers, and motivic homology theories.* Т. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, с. 87—137.

[10] Vladimir Voevodsky. “Triangulated categories of motives over a field”. В: *Cycles, transfers, and motivic homology theories*. Т. 143. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, с. 188—238.