Отчёт по конкурсу «Молодая математика России» за 2021 год
Габдуллина Михаила Рашидовича

0.1 Результаты, полученные в 2021 году

В 2021 году мною получены результаты в следующих трёх задачах, две из которых находятся на стыке гармонического анализа и теории чисел, а третья связана с изучением последовательностей натуральных чисел, имеющих специальную мультипликативную структуру.

Первая задача касается вопроса равномерной сходимости тригонометрических рядов с нецелыми гармониками. Хорошо известен следующий классический результат: в 1916 году Чонди и Джоллифф [CJ] показали, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx$ с неотрицательными и монотонными коэффициентами $\{c_k\}$ сходится равномерно на $[0, \pi]$ в том и только том случае, когда $c_k k \to 0$, $k \to \infty$. Позднее многие авторы ослабляли условие монотонности, тем самым обобщая эту теорему на более широкие классы последовательностей $\{c_k\}$: см., например, [Lei], [Ste], [Tik]. Для простоты ограничимся описанием результатов в случае монотонных (и неотрицательных) последовательностей коэффициентов. В своей недавней работе [Og] Оганесян рассматривала более общие ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x, \qquad \alpha > 0, \tag{1}$$

и показала следующее: во-первых, при нечётных $\alpha \in \mathbb{N}$ равномерная сходимость ряда (1) на $[0, \pi]$ (или, что то же самое, на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$) равносильна условию $c_k k \to 0$, $k \to \infty$; во-вторых, при чётных $\alpha \in \mathbb{N}$ равномерная сходимость на $\mathbb{R}$ равносильна условию $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$; в-третьих, при $\alpha \in (0, 2)$ равномерная сходимость этого ряда на любом ограниченном подмножестве прямой равносильна условию $c_k k \to 0$, $k \to \infty$. Мне удалось доказать следующие теоремы, дополняющие и обобщающие результаты Оганесян.

Теорема 1 *Пусть $\alpha > 0$ — нецелое и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность неотрицальных чисел. Тогда ряд (1) сходится равномерно на любом ограниченном подмножестве прямой в том и только том случае, когда $c_k k \to 0$, $k \to \infty$.*

Теорема 2 *Пусть $\alpha > 0$ — рациональное нецелое и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность неотрицальных чисел. Тогда ряд (1) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ в том и только том случае, когда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$.*

Вторая задача, в которой я получил результаты в уходящем году, связана с изучением экстремальных свойств тригонометрических полиномов, спектр которых содержится во множестве точных квадратов. Напомним, что множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется Λ_p-множеством (при $p > 2$), если найдётся константа $C(A) > 0$ такая, что при любых комплексных коэффициентах $\{a_n\}$ справедливо

$$\left\| \sum_{n \in A} a_n e(nx) \right\|_p \leqslant C(A) \left(\sum_{n \in A} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

(здесь и далее используется обозначение $e(u) = e^{2\pi i u}$, а для функции f, определённой на окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, через $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(u)|^p du \right)^{1/p}$ обозначена её L_p-норма). Другими словами, $A \subseteq \mathbb{N}$ — Λ_p-множество, если любой тригонометрический полином со спектром в A имеет L_p-норму, по порядку равную L_2-норме (то есть, экстремально малую). Хорошо известно, что множество точных квадратов $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ не является Λ_4-множеством (а стало быть, и Λ_p-множеством при $p > 4$, в силу неубывания L_p-норм по p), так как

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} e(n^2 x) \right\|_4 \asymp N^{1/2} (\log N)^{1/4}.$$

В связи с этим естественным образом возникают следующие задачи. Прежде всего, имеется знаменитый (и до сих пор открытый) вопрос Рудина: является ли множество точных квадратов Λ_p-множеством при $p \in (2, 4)$? Кроме того, в 1992 году испанские математики Кордоба и Силлеруело [CC] выдвинули следующую гипотезу. Пусть $\gamma \in (0, 1)$ и f — тригонометрический полином, спектр которого содержится во множестве $\{n^2 : N \leqslant n \leqslant N + N^\gamma\}$ (говоря неформально — во множестве квадратов на «коротком промежутке»); тогда

$$\|f\|_4 \leqslant C(\gamma) \|f\|_2$$

для некоторого $C(\gamma) > 0$, не зависящей от f и N. Это утверждение легко доказать при $\gamma \in (0, 1/2]$, однако на протяжении почти 30 лет задача оставалась нерешенной для любого $\gamma > 1/2$. Мне удалось получить в этой задаче существенное продвижение.

Теорема 3 *Гипотеза Силлеруело и Кордобы верна для всех* $\gamma < \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618...$

Я надеюсь доказать эту гипотезу для любого $\gamma \in (0,1)$.

Третья задача, которую я хочу упомянуть в своём отчёте — это задача о количестве натуральных чисел со специальной мультипликативной структурой. Последовательности значений мультипликативных функций изучались известными математиками: так, Эрдёш и Мирский [EM] в 1951 году показали, что

$$\#\{\tau(n) : n \leqslant x\} = \exp\left(\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + o(1)\right)\frac{(\log x)^{1/2}}{\log\log x}\right)$$

(здесь $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ — количество делителей натурального числа n), а последовательности значений функции Эйлера $\varphi(n) = \#\{k \leqslant n : (k,n) = 1\}$ были посвящены работы Эрдёша, Эрдёша и Холла, Померанса, и, наконец, Майера и Померанса [MP], которые показали, что

$$\#\{\varphi(n) : n \leqslant x\} = \frac{x}{\log x}\exp((C + o(1))(\log\log\log x)^2)$$

для некоторой постоянной $C > 0$; точный порядок считающей функции последовательности $\{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}\}$ нашёл Форд [F]. В нашей совместной работе с В.В. Юделевичем мы рассматриваем близкие задачи. Для функции $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ определим величину

$$N_f^{\times}(x) = \{n \leqslant x : n = kf(k) \text{ для некоторого } k\}.$$

Обозначим через $\omega(n)$ количество простых делителей числа n. Хорошо известно, что типичные значения всех трёх упомянутых арифметических функций велики: для почти всех $n \leqslant x$ мы имеем $\omega(n) \asymp \log\log x$, и, следовательно, $\tau(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ также большое; наконец, $\varphi(n) \gg n/\log\log n$. Отсюда легко видеть, что в этих трёх случаях соответствующие величины $|N_f^{\times}(x)|$ суть $o(x)$. Возникает естественный вопрос: каковы их порядки роста? Нам удалось получить ответы для всех упомянутых случаев.

Теорема 4 *Имеем*

$$\begin{aligned} &1)\quad |N_\tau^{\times}(x)| \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}};\\ &2)\quad |N_\omega^{\times}(x)| \asymp \frac{x}{\log\log x};\\ &3)\quad |N_\varphi^{\times}(x)| = (c_0 + o(1))x^{1/2}, \end{aligned}$$

где $c_0 = 1.365\ldots$.

0.2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. K. Ford, M. R. Gabdullin, *Sets whose differences avoid squares modulo m*, Proc. Amer. Math. Soc., 149 (2021), 3669–3682.

2. M. R. Gabdullin, *Trigonometric series with noninteger harmonics*, J. Math. Anal. Appl. (to appear), https://arxiv.org/abs/2102.05698.

3. M. R. Gabdullin, V. V. Iudelevich, *Numbers of the form $kf(k)$*, to apper on ArXiv

0.3 Участие в конференциях и школах

1. Школа-конференция "Дискретизация и смежные вопросы", Москва, 9–13 марта 2021.

2. Онлайн-конференция "Combinatorial and additive number theory" (New York Number Theory Seminar), 24–28 мая 2021.

3. Школа-конференция С.Б. Стечкина по теории функций, Республика Алтай (Чемальский район), 9–19 августа 2021.

4. Конференция "Теория приближений и приложения", посвященная 100-летию со дня рождения С.Б. Стечкина, Москва, 5—11 сентября 2021.

0.4 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь сотрудником отдела теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН, сотрудником Математического центра мирового уровня «Математический институт им. В. А. Стеклова РАН» и сотрудником лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» при мехмате МГУ.

0.5 Педагогическая деятельность

Отсутствует.

Список литературы

[CC] A. Cordoba, J. Cilleruelo, *Trigonometric polynomials and lattice points*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 4, 899–905.

[CJ] T.W. Chaundy, A.E. Jolliffe, *The uniform convergence of a certain class of trigonometric series*, Proc. London Math. Soc., 15 (1916), 214–216.

[EM] P. Érdös, L. Mirsky, *The distribution of values of the divisor function $d(n)$* , Proc. London Math. (1952), 257–271.

[F] K. Ford, *The Distribution of Totients*, The Ramanujan Journal. 2 (1998), 67-151.

[Lei] L. Leindler, *On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series*, Anal. Math., 27(4) (2001), 279–285.

[Og] K. Oganesyan, *Uniform convergence criterion for non-harmonic sine series*, Sb. Math., 212:1 (2021), 70-110.

[MP] H. Maier and C. Pomerance, *On the number of distinct values of Euler's φ-function* , Acta Arith. 49 (1988), 263–275.

[Ste] S.B. Stechkin, *Trigonometric series with monotone type coefficients*, Proc. Steklov Inst. Math. Suppl., 1 (2001), 214–224.

[Tik] S. Tikhonov, *Trigonometric series with general monotone coefficients*, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 721–731.