Отчёт по конкурсу «Молодая математика России» за 2022 год Габдуллина Михаила Рашидовича

0.1 Результаты, полученные в 2022 году

В уходящем году мною получены результаты в следующих трёх задачах теории чисел, касающихся поведения функции делителей, распределения простых чисел и чисел вида $k + f(k)$, где f — неотрицательная арифметическая функция.

1. Проблема делителей Карацубы. В 2004 году Карацуба на семинаре «Аналитическая теория чисел и приложения» поставил следующую задачу: найти асимптотику суммы

$$\Phi(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)}$$

при $x \to \infty$, где $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ — функция делителей, а суммирование ведётся по простым числам, не превосходящим x. Данный вопрос является естественным «гибридом» следующих двух классических задач теории чисел. Первая из них (проблема делителей Титчмарша) заключается в изучении суммы

$$D(x) = \sum_{p \leqslant x} \tau(p-1).$$

Хорошо известно (см. [1], [13], [15], [19]), что

$$D(x) \sim \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\, x, \qquad x \to \infty,$$

где $\zeta(s)$ обозначает дзета-функцию Римана. Вторая задача состоит в нахождении асимптотики суммы

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\tau(n)}$$

и была решена Рамануджаном в [18]: он показал, что

$$T(x) = \frac{c_0 x}{\sqrt{\log x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)\right),$$

где $c_0 = 0.5486\ldots$ В совместной работе с Конягиным и Юделевичем [11] мы с помощью методов решета получили следующие оценки.

Теорема 1 *Имеет место оценка*

$$\Phi(x) \asymp \frac{x}{(\log x)^{3/2}}.$$

Теорема 2 *Имеет место оценка*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)} \asymp \frac{x}{(\log x)^{1/2}}.$$

Теорема 1 в первом приближении даёт ответ на задачу, поставленную Карацубой. Теорема 2, вероятно, может быть обобщена на случай произвольного неприводимого многочлена, и мы планируем рассмотреть этот вопрос в одной из следующих работ.

2. Числа, удалённые от простых.

В 2015 году Конягин, Форд и Хиз-Браун [5] ввели понятие «удалённости» от простых чисел. Для натурального n обозначим через $F(n)$ расстояние от n до ближайшего простого числа. Авторы назвали n числом, «избегающим простых с константой c», если

$$F(n) \geqslant c\frac{\log n \log\log n \log\log\log\log n}{(\log\log\log n)^2},$$

и доказали, что для любого натуральном k существуют $c = c(k) > 0$ и бесконечно много точных k-х степеней натуральных чисел, которые являются удалёнными от простых с константой c. Майер и Рассиас [16] обобщили этот результат на случай точных k-х степеней простых чисел и при этом улучшили нижнюю оценку на их расстояние до множества простых; см. также их недавнюю работу [17].

В 2022 году я получил результат в следующем аддитивной проблеме, связанной с функцией $F(n)$. Можем ли мы показать, что любое большое натуральное число N представимо в виде суммы чисел n_1 и n_2 с большими значениями $F(n_1)$ и $F(n_2)$? Отметим, что стандартная техника, позволяющая строить числа с большим значением $F(n)$ (то есть, находить большие промежутки между простыми числами), в данной задаче не работает (см. [9] для более подробного комментария), и поэтому здесь нужен новый подход.

Прежде всего, что некоторые несложные вероятностные рассуждения позволяют показать существование нужного представления с условиями $F(n_i) \gg \log N$, $i = 1, 2$. Эта оценка выглядит естественной, так как из асимптотического закона распределения простых чисел следует, что среднее значение $F(n)$ (взятое по числам $n \leqslant N$) имеет порядок по крайней мере $\log N$. Моей целью было усилить эту оценку, заменив $\log N$ на более быстро растующую функцию. Для $\rho \in (0, 1)$, определим величину

$$C(\rho) = \sup \left\{ \delta \in (0, 1/2) : \frac{6 \cdot 10^{2\delta}}{\log(1/(2\delta))} < \rho \right\}.$$

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 3 ([9]) *Каждое достаточно большое натуральное число N может быть представлено в виде суммы $N = n_1 + n_2$, где*

$$F(n_i) \geqslant (\log N)(\log \log N)^{C(1/2) - o(1)},$$

при $i = 1, 2$.

Из доказательства следует, что при больших N имеется по крайней мере $\exp((\log N)^{1-o(1)})$ таких представлений. Кроме того, $C(1/2) > 1/325565$.

Теорема 3 допускает следующую интерпретацию. Напомним, что множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется базисом порядка k, если каждое достаточно большое натуральное число можно представить в виде суммы k элементов из A. Рассмотрим множество

$$\left\{ n \geqslant 3 : F(n) \geqslant (\log n)(\log \log n)^{\delta} \right\}$$

(множество чисел, «удалённых от простых»). Теорема 3 говорит, что это множество является базисом порядка 2 при любом $\delta < C(1/2)$.

В доказательстве теоремы 3 я использовал метод из недавней работы [6] Конягина, Мэйнарда, Померанса, Тао и Форда, в которой авторы использовали так называемую «лемму о покрытиях гиперграфа» для получения нижних оценок на промежутки между элементами общих просеянных множеств.

3. Числа вида $k + f(k)$. Для функции $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ положим

$$N_f^+(x) = \#\{n \leqslant x : n = k + f(k) \text{ для некоторого } k\}.$$

Нас интересуют оценки величины $N_f^+(x)$ для случаев $f \in \{\omega, \tau, \varphi\}$, где $\tau(n)$ — количество делителей числа n, $\omega(n)$ — количество простых делителей числа n, и $\varphi(n) = \#\{k \leqslant n : (k, n) = 1\}$ — функция Эйлера.

Численные эксперименты предсказывают, что при больших x должны выполняться соотношения

$$N_\tau^+(x) \approx 0.67x,$$

$$N_\omega^+(x) \approx 0.73x,$$

$$N_\varphi^+(x) \approx 0.37x.$$

Померанс, Шаркози и Эрдёш [3] показали (среди прочего), что

$$N_\omega^+(x) \gg x;$$

иными словами, множество натуральных чисел, представимых в виде $k+\omega(k)$ имеет положительную нижнюю (асимптотическую) плотность. В недавней работе Кучерявого [14] получена нижняя оценка на количество чисел, не представимых в таком виде:

$$x - N_\omega^+(x) \gg \frac{x}{\log\log x}.$$

В совместной работе с Лука и Юделевичем мы получили следующие оценки на функции $N_\tau^+(x)$ и $N_\varphi^+(x)$.

Теорема 4 *При достаточно больших x справедливы оценки*

$$x \ll N_\tau^+(x) \leqslant 0.94x.$$

Теорема 5 *При достаточно больших x справедливы оценки*

$$\frac{x\log\log x}{\log x} \ll N_\varphi^+(x) \leqslant 0.93x.$$

Мы надеемся улучшить нижнюю оценку в теореме 5 до гипотетически правильной по порядку.

0.2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. M. R. Gabdullin, *Trigonometric series with noninteger harmonics*, J. Math. Anal. Appl. 508:1 (2022), 125792, 11 pp.

2. M. R. Gabdullin, V. V. Iudelevich, F. Luca, *Numbers of the form $kf(k)$*, to appear in Int. J. Number Theory.

3. M. R. Gabdullin, *The stochasticity parameter of quadratic residues*, to appear in Int. Mat. Res. Not. IMRN

4. M. R. Gabdullin, *Prime avoiding numbers is a basis of order* 2, https://arxiv.org/abs/2209.03058

5. M. R. Gabdullin, V.V. Iudelevich, S.V. Konyagin, to appear on Arxiv.

0.3 Участие в конференциях и школах

1. XXI Международная Конференция, посвящённая 85-летию Карацубы, Тула, 17–21 мая 2022.

2. Онлайн-конференция “Combinatorial and additive number theory” (New York Number Theory Seminar), 23–27 мая 2022.

3. Number Theory Conference, Дебрецен, Венгрия, 4–8 июля 2022

4. Школа-конференция С.Б. Стечкина по теории функций, г. Кыштым, 1–10 августа 2022 (онлайн-доклад).

5. Вторая Всероссийская Конференция Математических Центров, Москва, 7–11 ноября 2022.

0.4 Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь сотрудником отдела теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова РАН, сотрудником Математического центра мирового уровня «Математический институт им. В. А. Стеклова РАН» и сотрудником лаборатории «Многомерная аппроксимация и приложения» при мехмате МГУ.

0.5 Педагогическая деятельность

Являюсь одним из организаторов ежегодной Олимпиады по Математическому анализу, проводимой с 2015 года в Уральском Федеральном Университете.

0.6 Итоги за три года

В 2020 году были получены результаты, связанные со свойствами множества

$$R_m = \{a^2 : a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\}$$

квадратичных вычетов по модулю m. В совместной работе с Фордом [4] было показано, что для почти всех модулей m размер любого подмножества $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, разность которого не содержит ненулевых квадратичных вычетов, есть $o(m^{1/2})$; тем самым в этой задаче удалось преодолеть «корневой барьер» и впервые получить столь сильные оценки для большинства m. В работе [8] исследовалась задача, предложенная Арнольдом: получение оценок на параметр стохастичности (второй момент расстояний между элементами) множества R_m. Было установлено, что для множества модулей m положительной нижней плотности данная величина асимптотически эквивалентна соответствующему среднему значению параметра, взятому по всем подмножествам $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ размера $|R_m|$. Также были найдены примеры «нерегулярных» модулей, для которых указанное соотношение не выполняется.

В 2021 году изучались следующие задачи, находящиеся на стыки теории чисел и гармонического анализа. Первая из них посвящена вопросу равномерной сходимости тригонометрических рядов вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k^{\alpha} x, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$ и $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность неотрицательных чисел (на самом деле результаты были получены для более широкого класса последовательностей, но для простоты мы ограничимся описанием этого важного частного случая). Было показано [7], что в случае нецелого α ряд (1) сходится равномерно на любом ограниченном подмножестве прямой тогда и только тогда, когда $c_k k \to 0$, $k \to \infty$. Кроме того, в случае нецелого рационального α было показано, что равномерная сходимость этого ряда на всей прямой равносильна тому, что $\sum_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$ (таким образом, в данной ситуации тривиальное достаточное условие равномерной сходимости является необходимым). Эти результаты обобщают и дополняют многие классические теоремы, касающиеся сходимости рядов вида (1). Вторая задача касается гипотезы, выдвинутой Силлеруело и Кордобой в 1992 году [2]: для любого $\gamma \in (0,1)$ существует $C(\gamma) > 0$ такое, что при любых комплексных числах $\{c_k\}_{k=1}^{N}$

справедливо неравенство

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{N\leqslant k\leqslant N+N^\gamma} c_k e^{2\pi i k^2 x}\right|^4 dx\right)^{1/4} \leqslant C(\gamma)\left(\sum_{N\leqslant k\leqslant N+N^\gamma} |c_k|^2\right)^{1/2}.$$

Говоря неформально, это означает следующее: тригонометрические полиномы со спектром во множестве квадратов на «коротком» промежутке имеют экстремально малую L_4-норму (по порядку равную их L_2-норме). Данное утверждение легко проверить при $\gamma \in (0, 1/2)$, однако оно не было доказано ни для какого значения $\gamma > 1/2$. Мне удалось установить [10], что оно имеет место при всех $\gamma < \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618...$

В 2022 году совместно с Конягиным и Юделевичем [11] были получены точные по порядку оценки на суммы

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{\tau(p-1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\tau(n^2+1)}.$$

Также мною был получен [9] результат, заключающийся в том, что числа, у которых расстояние до ближайшего простого числа «достаточно велико», образуют базис порядка 2. Наконец, в совместных работах с Лука и Юделевичем изучались величины

$$N_f^\times(x) = \#\{n \leqslant x : n = kf(k) \text{ для некоторого } k \leqslant x\}$$

и

$$N_f^+(x) = \#\{n \leqslant x : n = k + f(k) \text{ для некоторого } k \leqslant x\},$$

где f — одна из функций τ, ω, φ. Были получены точные по порядку оценки для величин $N_f^\times(x)$ во всех этих трёх случаях [12], а также нижние и верхние оценки на $N_\tau^+(x)$ и $N_\varphi^+(x)$.

Список литературы

[1] E. Bombieri, J. B. Friedlander, H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions to large moduli*, Acta Math. 357 (1985), pp. 51-76.

[2] A. Cordoba, J. Cilleruelo, *Trigonometric polynomials and lattice points*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), no. 4, 899–905.

[3] P. Erdős, C. Pomerance, A. Sárközy, *On locally repeated values of certain arithmetic functions.III*, Proc. Amer. Math Soc., 101 (1), 1987.

[4] K. Ford, M.R. Gabdullin, *Sets whose differences avoid squares modulo m*, Proc. Amer. Math. Soc., 149 (2021), 3669–3682.

[5] K. Ford, D.R. Heath-Brown, S. Konyagin, *Large gaps between consecutive prime numbers containing perfect powers*, In Analytic number theory, 2015, Springer, Cham, pp. 83-92.

[6] K. Ford, S. V. Konyagin, J. Maynard, C. Pomerance, T. Tao, *Long gaps in sieved sets*, J. Eur. Math. Soc. **23**, 667–700 (2021); see also https://arxiv.org/abs/1802.07604.

[7] M. R. Gabdullin, *Trigonometric series with noninteger harmonics*, J. Math. Anal. Appl. 508:1 (2022), 125792, 11 pp.

[8] M. R. Gabdullin, *The stochasticity parameter of quadratic residues*, to appear in Int. Mat. Res. Not. IMRN

[9] M. R. Gabdullin, *Prime avoiding numbers is a basis of order* 2, https://arxiv.org/abs/2209.03058

[10] M.R. Gabdullin, *Trigonometric polynomials with frequencies in the set of squares and divisors in a short interval*, https://arxiv.org/pdf/2205.13611

[11] M. R. Gabdullin, V. V. Iudelevich, S.V. Konyagin, *Karatsuba divisor problem*, in preparation.

[12] M. R. Gabdullin, V. V. Iudelevich, F. Luca, *Numbers of the form $kf(k)$*, to appear in Int. J. Number Theory.

[13] H. Halberstam, *Footnote to the Titchmarsh-Linnik divisor problem*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), pp. 187-188.

[14] P. Kucheriaviy, *On numbers not representable as $n + \omega(n)$*, https://arxiv.org/pdf/2203.12006

[15] Y. V. Linnik, *New versions and new uses of the dispersion methods in binary additive problems*, In Doklady Akademii Nauk, (1961), Vol. 137, No. 6, pp. 1299-1302, Russian Academy of Sciences.

[16] H. Maier, M. Th. Rassias, *Large gaps between consecutive prime numbers containing perfect k-th powers of prime numbers*, Journal of Functional Analysis **272**(6), 2659-2696 (2017).

[17] H. Maier, M. Th. Rassias. *Prime Avoidance Property of k-th Powers of Prime Numbers with Beatty Sequence*, Discrete Mathematics and Applications. Springer, Cham, 397-404 (2020).

[18] S. Ramanujan, *Some formulae in the analytic theory of numbers*, The Mess. Math. (1916) **45**, pp. 81-84.

[19] E. C. Titchmarsh, *A divisor problem*, Rend. Palermo. (1930) **54**, pp. 414-429.