Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2020 год

Егор Косов

1. Полученные результаты

Работа за отчетный год велась в двух направлениях. Во-первых, были продолжены исследования свойств регулярности плотностей распределений нелинейных функционалов на пространствах с гауссовскими (и более общими) мерами. В этом направлении в работе [7] были установлены оценки на L^1 модуль непрерывности плотности распределения многочленов от гауссовских случайных векторов с некоторыми дополнительными структурными ограничениями на многочлен. Полученные оценки модуля непрерывности позволяют усилить результаты работы [3] об оценках характеристических функций многочленов от гауссовских векторов. Кроме того, совместно с В.И. Богачевым и С.Н. Поповой, в работах [1] и [2] были исследованы вопросы дифференцируемости плотностей распределений однородных и сильно выпуклых функций от гауссовских случайных векторов. Это исследование было мотивировано вопросом А.Н. Тихомирова о свойствах распределения максимума квадратичных форм. Во-вторых, в рамках исследований, проводимых лабораторией “Многомерная аппроксимация и приложения”, изучался вопрос дискретизации L^p норм на конечномерных подпространствах пространств $L^p(\mu)$ с вероятностной мерой μ, т.е. вопрос о возможности адекватной замены интегральной нормы ее дискретным аналогом. В этом направлении были улучшены оценки необходимого числа точек дискретизирующего множества.

Приведем теперь точные формулировки полученных результатов.

Для функции $\varrho \in L^1(\mathbb{R})$ ее L^1 модуль непрерывности $\omega(\varrho, \cdot)$ определяется следующим образом:

$$\omega(\varrho, \varepsilon) := \sup_{|h|\le\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |\varrho(s+h) - \varrho(s)|\, ds.$$

Если $\omega(\varrho, \varepsilon) \le C\varepsilon$, то ϱ будет функцией ограниченной вариации (ее обобщенная производная задается ограниченной мерой), а в случае, когда $\omega(\varrho, \varepsilon) \le C\varepsilon^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, функция ϱ принадлежит пространству Никольского–Бесова $B^\alpha_{1,\infty}(\mathbb{R})$. Т.е. $\omega(\varrho, \cdot)$ характеризует регулярность функции ϱ. Ранее, в работе [6], был установлен следующий факт.

Пусть ϱ_g — плотность распределения непостоянной случайной величины

$$g(X) := \sum_{j_1+\ldots+j_n \le d} a_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n},$$

где $X := (X_1, \ldots, X_n)$ — нормальный случайный вектор. Тогда ϱ_g принадлежит пространству Никольского–Бесова $B^{1/d}_{1,\infty}(\mathbb{R})$. Кроме того, существует такое число $C(d)$, зависящее только от d, что

$$\omega(\varrho_g, \varepsilon) \le C(d)[\mathbb{D}g(X)]^{-1/2d}\varepsilon^{1/d}$$

где $\mathbb{D}[g(X)]$ — дисперсия случайной величины $g(X)$.

В этом году исследовался аналогичный вопрос о регулярности плотностей распределений многочленов специального вида:

$$f(X) := \sum_{j_1=0}^{m} \ldots \sum_{j_n=0}^{m} a_{j_1,\ldots,j_n} X_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{j_n},$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — независимые, $\mathcal{N}(0,1)$ распределенные случайные величины. Т.е. каждая переменная может входить в мономы в степенях не выше m. В работе [7] было установлено, что регулярность распределений случайных величин указанного вида не сильно отличается от регулярности общих многочленов степени не выше m, а именно, был установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $m, d \in \mathbb{N}$, $d \geq m$ и пусть $X := (X_1, \ldots, X_n)$ — стандартный нормальный вектор в $\mathbb{R}^n$. Существует такое число $C(m, d)$, зависящее лишь от d и m, что для каждого непостоянного многочлена*

$$f(x) := \sum_{j_1=0}^{m} \ldots \sum_{j_n=0}^{m} a_{j_1,\ldots,j_m} x_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}$$

степени $d[f] := \max\{j_1 + \ldots + j_n \colon a_{j_1,\ldots,j_m} \neq 0\} \leq d$ выполнено

$$\omega(\varrho_f, \varepsilon) \leq C(m, d)(\varepsilon/a[f])^{1/m}\big[|\ln(\varepsilon/a[f])|^{d-m} + 1\big],$$

где $a[f] := \max\limits_{j_1+\ldots+j_n=d[f]} |a_{j_1,\ldots,j_n}|$, а ϱ_f — плотность случайной величины $f(X)$.

В работе [3] была получена следующая оценка на характеристическую функцию случайной величины $f(X)$ (см. [3, Теорема 5]):

$$|\mathbb{E}\exp\{itf(X)\}| \leq C(n, m, d[f])|a[f] \cdot t|^{-1/m}\big[\ln(2 + |a[f]t|)\big]^{\alpha}$$

где $\alpha = \frac{1}{2}\big(3n - \frac{d[f]}{m}\big) - 1$, $d[f] := \max\{j_1 + \ldots + j_n \colon a_{j_1,\ldots,j_m} \neq 0\}$, $a[f] := \max\limits_{j_1+\ldots+j_n=d[f]} |a_{j_1,\ldots,j_n}|$. В качестве следствия теоремы 1 был получен не зависящий от числа переменных n аналог приведенной оценки. А именно, с $\alpha = d[f] - m$ и константой $C(m, d[f])$ не зависящей от n.

В работах [1] и [2] исследовались вопросы регулярности плотностей распределений случайных величин вида $f(X)$, где f — однородная или сильно выпуклая функция, а X — n-мерный стандартный нормальный вектор (или более общий вектор с локально соболевской плотностью). Напомним, что непрерывная функция f называется сильно выпуклой, если существует такое положительное число m, что

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) \geq m|h|^2 \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n.$$

Приведем один из характерных результатов работы [2].

Теорема 2. *Пусть для функции $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует такое трехмерное подпространство L, что f сильно выпукла вдоль этого подпространства, т.е. для некоторого $m > 0$ выполнено*

$$f(x + h) + f(x - h) - 2f(x) \geq m|h|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in L.$$

Тогда плотность ϱ_f случайной величины $f(X)$, где X — стандартный нормальный вектор, будет функцией ограниченной вариации и $\|\varrho_f'\|_{\mathrm{TV}} \leq 4m^{-1}$, где $\|\varrho_f'\|_{\mathrm{TV}}$ — норма полной вариации меры ϱ_f'.

Теорему 2 можно применить к исследованию регулярности плотности распределения максимума квадратичных форм.

Следствие. Пусть $Q_1, \ldots, Q_p$ — квадратичные формы. Предположим, что существует общее трехмерное подпространство L, на котором все квадратичные формы не вырождены, т.е. есть такое число $m > 0$, что $Q_j(h) \geq m|h|^2$ для каждого $h \in L$, для каждого $j \in \{1, \ldots, p\}$. Тогда функция $f := \max\{Q_1, \ldots, Q_p\}$ будет сильно выпуклой вдоль подпространства L и $\|\varrho_f'\|_{\mathrm{TV}} \leq 8m^{-1}$.

Наконец, приведем результаты о дискретизации интегральных норм.

Пусть L — N-мерное линейное подпространство в $L^p(\mu) \cap C(K)$, где μ — вероятностная мера на некотором компакте K. Пусть $C > c > 0$. Скажем, что L^p норма на подпространстве L допускает дискретизацию с константами c, C и m точками, если найдутся m точек

$x_1, \dots, x_m \in K$, для которых

$$c\|f\|^p_{L^p(\mu)} \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \le C\|f\|^p_{L^p(\mu)}.$$

Ясно, что всегда $m \ge N$. Поэтому возникает вопрос, возможно ли при при некоторых естественных условиях на подпространство L гарантировать возможность дискретизации L^p-нормы с заданными константами c, C и с количеством точек m близким по порядку к размерности N. Основной результат, полученный в этом направлении в отчетный год, представлен в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть $p \in [1, \infty)$ и пусть L — N-мерное подпространство $L^p(\mu) \cap C(K)$. Предположим, что для некоторого $M > 0$ выполнено*

$$\max_{x\in K} |f(x)| \le MN^{1/\max\{p,2\}}\|f\|_{L^{\max\{p,2\}}(\mu)}$$

для всех $f \in L$. Тогда найдутся

$$m = \begin{cases} O(N[\log N]^p),\ p > 2 \\ O(N[\log N]^2),\ p \in (1,2) \\ O(N[\log N]^{7/2}),\ p = 1 \end{cases}$$

точек $x_1, \dots, x_m \in K$, для которых

$$\frac{1}{2}\|f\|^p_p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \le \frac{3}{2}\|f\|^p_p$$

для каждого $f \in L$.

Отметим, что при $p \in [1, 2]$ предположение

$$\max_{x\in K} |f(x)| \le MN^{1/2}\|f\|_{L^2(\mu)} \quad \forall f \in L$$

равносильно наличию в L ортонормированного базиса $u_1, \dots, u_N$, для которого

$$|u_1(x)|^2 + \ldots + |u_N(x)|^2 \le M^2 N \quad \forall x \in K,$$

что, например, выполнено при наличии ортонормированного базиса из ограниченных функций (например, тригонометрическая система).

Теорема 3 усиливает ранее известные оценки количества точек дискретизации из работ [4], [5], [9], [10] в случае $p \in (1, 2)$ и дает оценку количества точек дискретизации в случае $p > 2$, аналога которой не было представлено ранее.

Список литературы

[1] Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *Плотности распределений однородных функций от гауссовских случайных векторов*, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления (2020), 495, 17–21

[2] Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *О распределениях однородных и выпуклых функций от гауссовских случайных величин*, Изв. РАН. Сер. матем. (2021), в печати

[3] Гетце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В., *Оценки для характеристических функций многочленов от асимптотически нормальных случайных величин*, УМН(1996), 51:2(308), 3–26

[4] Dai F., Prymak A., Shadrin A., Temlyakov V., Tikhonov S., *Sampling discretization of integral norms*, arXiv:2001.09320.

[5] Dai F., Prymak A., Shadrin A., Temlyakov V., Tikhonov S., *Entropy numbers and Marcinkiewicz-type discretization theorem*, arXiv:2001.10636.

[6] Kosov E.D. *Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials*, J. Math. Anal. Appl. (2018), 462, 390–406

[7] Kosov E.D., *Distributions of polynomials in Gaussian random variables under structural constraints*, arXiv:2007.12742
[8] Kosov E.D., *Marcinkiewicz-type discretization of L^p-norms under the Nikolskii-type inequality assumption*, arXiv:2005.01674
[9] Temlyakov V.N., *The Marcinkiewicz-type discretization theorems*, Constr. Approx. (2018), 48(2), 337–369
[10] Temlyakov V.N.,*The Marcinkiewicz-type discretization theorems for the hyperbolic cross polynomials*, Jaen J. Approx. (2017), 9(1), 37–63

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы:

1. Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *Плотности распределений однородных функций от гауссовских случайных векторов*, Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления (2020), том 495, с. 17–21

Работы, принятые к печати:

2. Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *О распределениях однородных и выпуклых функций от гауссовских случайных величин*, Изв. РАН. Сер. матем. (2021), в печати

Препринты:

3. Kosov E.D., *Distributions of polynomials in Gaussian random variables under structural constraints*, arXiv:2007.12742
4. Kosov E.D., *Marcinkiewicz-type discretization of L^p-norms under the Nikolskii-type inequality assumption*, arXiv:2005.01674

3. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

1. Доклад "Принадлежность плотностей распределений пространствам Никольского–Бесова" на 20-й международной Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения", Саратов, Россия, 28 января – 1 февраля 2020
2. Доклад "Sampling discretization of L^p norms in finite dimensional subspaces" на международной конференции "High Dimensional Probability", 15 – 19 июня 2020
3. Доклад "Теоремы дискретизации типа Марцинкевича для L^p норм в конечномерных подпространствах" на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством Б.С. Кашина и С.В. Конягина, 9 октября 2020

4. Работа в научных центрах и научных группах.

Являюсь сотрудником двух лабораторий: "Международной лаборатории стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных" и лаборатории "Многомерная аппроксимация и приложения".

5. Педагогическая деятельность

Весна 2020:

лекции и семинары по теории вероятностей и математической статистике, лекции и семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ;

семинары по математическому анализу, действительному анализу и функциональному анализу на мехмате МГУ.

Осень 2020:

лекции и семинары по теории вероятностей и математической статистике, лекции и семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ;

семинары по математическому анализу и функциональному анализу на мехмате МГУ.