Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2022 год

Егор Косов

1. Полученные результаты

В отчетный период велось исследование по трем направлениям: дискретизация интегральных норм; свойства распределений многочленов от случайных векторов с независимыми координатами и верхние оценки расстояния по вариации между распределениями случайных величин такого вида; функциональные аналоги задачи Шепарда.

1. Дискретизация интегральных норм.

Пусть Ω — некоторая область и пусть μ — вероятностная борелевскя мера на ней. Предположим, что фиксированы числа $C > c > 0$. В задаче дискретизации с помощью выбора точек для данного N-мерного подпространства L в $L^p(\mu)\cap C(\Omega)$ исследуется вопрос о том, каково минимальное натуральное число m, для которого найдутся такие точки $x_1, \dots, x_m$ в Ω, что

$$c\|f\|_p^p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \le C\|f\|_p^p \quad \forall f \in L,$$

где $\|f\|_p := \Bigl(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\Bigr)^{1/p}$, $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$. Ясно, что количество точек m не может оказаться меньше размерности подпространства N. Поэтому встает вопрос, при каких условиях на подпространство количество точек может быть выбрано близким к размерности подпространства. Отдельный интерес представляет задача «почти изометричной» дискретизации, т.е. дискретизации с $C = 1+\varepsilon$, $c = 1-\varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$.

Данная задача восходит к классическим результатам Бернштейна, Марцинкевича и Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации L^p-норм тригонометрических многочленов одной переменной.

Ранее в работе [4] при $p \in (1,2)$ был установлен следующий результат.

Теорема 1 (Е.К., 21)**.** *Пусть $p \in (1,2)$ и пусть L — N-мерное подпространство $L^p(\mu)\cap C(\Omega)$. Предположим, что для некоторого $K > 0$ выполнено*

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{KN}\|f\|_2 \quad \forall f \in L.$$

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдутся $m \le C(\varepsilon, K, p)N[\log N]^2$ точек $x_1, \dots, x_m \in \Omega$, для которых

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)|^p \le (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L.$$

В случае $p = 1$ была известна следующая теорема (см. [3]).

Теорема 2 (F. Dai, A. Prymak, A. Shadrin, V. Temlyakov, S. Tikhonov, 21)**.** *Пусть $p = 1$ и пусть L — N-мерное подпространство $L^p(\mu)\cap C(\Omega)$. Предположим, что для некоторого $K > 0$ выполнено*

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{KN}\|f\|_2 \quad \forall f \in L.$$

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдутся $m \le C(\varepsilon, K)N[\log N]^3$ точек $x_1, \dots, x_m \in \Omega$, для которых

$$(1-\varepsilon)\|f\|_1 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m |f(x_j)| \le (1+\varepsilon)\|f\|_1 \quad \forall f \in L.$$

В совместном исследовании с Ф. Даем и В.Н. Темляковым нам удалось уточнить предыдущие две теоремы. А именно, нами были установлены следующие два результата (см. [2]).

Теорема 3. *Пусть L — N-мерное подпространство $L^p(\mu) \cap C(\Omega)$. Предположим, что для некоторого $K > 0$ выполнено*

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{KN}\|f\|_2 \quad \forall f \in L.$$

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдутся $m \le C\varepsilon^{-2}KN\log N$ точек $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$, для которых

$$(1-\varepsilon)\|f\|_1 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(x_j)| \le (1+\varepsilon)\|f\|_1 \quad \forall f \in L$$

и

$$(1-\varepsilon)\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(x_j)|^2 \le (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Теорема 4. *Пусть $p \in (1,2)$ и пусть L — N-мерное подпространство $L^p(\mu) \cap C(\Omega)$. Предположим, что для некоторого $K > 0$ выполнено*

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{KN}\|f\|_2 \quad \forall f \in L.$$

Тогда для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ найдутся $m \le C(\varepsilon, p, K)\cdot N[\log N][\log\log N]^2$ точек $x_1, \ldots, x_m \in \Omega$, для которых

$$(1-\varepsilon)\|f\|_p^p \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(X_j)|^p \le (1+\varepsilon)\|f\|_p^p \quad \forall f \in L$$

и

$$(1-\varepsilon)\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(X_j)|^2 \le (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Отметим, что помимо уточнения количества точек, достаточного для дискретизации интегральной нормы, установленные теоремы дают и качественно новый результат об одновременной дискретизации общим набором точек как L^p-нормы, так и L^2-нормы.

2. Верхние оценки расстояния по вариации между распределениями стохастических многочленов.

Пусть $N \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, r > 0, R > 0$. Говорят, что для случайного вектора X в $\mathbb{R}^N$ выполнено условие $\mathfrak{D}(\varepsilon, r, R)$, если существует такая точка $x \in \mathbb{R}^N$, что $|x| \le R$ и для каждого борелевского множества $A \subset B_r(x)$ выполнена оценка

$$P(X \in A) \ge \varepsilon\lambda(A),$$

где λ — мера Лебега в $\mathbb{R}^N$ и где $B_r(x)$ — обычный евклидов шар радиуса r с центром в точке x. Условие $\mathfrak{D}(\varepsilon, r, R)$ означает, что плотность абсолютно непрерывной компоненты распределения случайного вектора X отделена числом ε от нуля на шаре $B_r(x)$.

Рассмотрим случайную величину вида

$$Q_{d,k_*}(a, X) = \sum_{m=0}^{d}\sum_{n_1<\ldots<n_m}\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{k_*}\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{N} a_m((n_1,k_1,j_1),\ldots,(n_m,k_m,j_m))\prod_{i=1}^{m}(X_{n_i,j_i}^{k_i} - \mathbb{E}\big[X_{n_i,j_i}^{k_i}\big]),$$

где $a = (a_1, \ldots, a_d)$, $a_m \colon (\mathbb{N}^3)^m \to \mathbb{R}$, и где $X := (X_1, \ldots, X_n)$, $X_k := (X_{k,1}, \ldots, X_{k,N})$, набор N-мерных независимых случайных векторов, для каждого из которых выполнено условие $\mathfrak{D}(\varepsilon, r, R)$. В работах [5] и [1] рассматривались вопросы о верхних оценках расстояния по вариации между двумя многочленами указанного выше вида, в частности, вопрос о таких верхних оценках в терминах расстояния Канторовича–Рубинштейна. Напомним, что расстояние по вариации между случайными величинами ξ и η задается формулой:

$$d_{\mathrm{TV}}(\xi, \eta) := \sup\Big\{\mathbb{E}\big[\varphi(\xi) - \varphi(\eta)\big] \colon \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\Big\},$$

а расстояние Канторовича–Рубинштейна — формулой:

$$d_{\mathrm{KR}}(\xi,\eta) := \sup\Big\{\mathbb{E}\big[\varphi(\xi)-\varphi(\eta)\big] : \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \|\varphi\|_\infty\le 1,\ \|\varphi'\|_\infty\le 1\Big\}.$$

Для набора отображений $a=(a_1,\ldots,a_d)$, $a_m\colon (\mathbb{N}^3)^m\to\mathbb{R}$, положим

$$[a_m] := \Big(\sum_{n_1<\ldots<n_m}\ \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{k_*}\ \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{N}\big[a_m((n_1,k_1,j_1),\ldots,(n_m,k_m,j_m))\big]^2\Big)^{\frac12},$$

$$[a] := \Big(\sum_{m=0}^{d}[a_m]^2\Big)^{\frac12},$$

$$\delta(a_m) := \max_n \sum_{n_1<\ldots<n_m}\ \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{k_*}\ \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{N} I_{\{n\in\{n_1,\ldots,n_m\}\}}\big[a_m((n_1,k_1,j_1),\ldots,(n_m,k_m,j_m))\big]^2.$$

В работе [1] был установлен следующий результат.

Теорема 5 (V. Bally, L. Caramellino, 19)**.** *Пусть $A,B\in(0,+\infty)$. Предположим, что для каждого случайного вектора из наборов независимых векторов $(X_1,\ldots,X_n)$ и $(Y_1,\ldots,Y_n)$ выполнено условие $\mathfrak{D}(\varepsilon,r,R)$. Предположим, что заданы такие два набора коэффициентов $a=(a_1,\ldots,a_d)$ и $b=(b_1,\ldots,b_{d'})$, что*

$$A\le [a_d],[b_{d'}];\quad [a],[b]\le B.$$

Тогда для каждого числа $\theta\in(\frac14,1)$ найдутся такие числа $C,c>0$, что

$$d_{\mathrm{TV}}\big(Q_{d,k_*}(a,X),Q_{d',k_*}(b,Y)\big)\le$$
$$\le C\big[d_{\mathrm{KR}}\big(Q_{d,k_*}(a,X),Q_{d',k_*}(b,Y)\big)\big]^{\frac{\theta}{1+2\max\{d,d'\}k^*}}+\exp\big(-c[\delta(a_d)]^{-1}\big)+\exp\big(-c[\delta(b_{d'})]^{-1}\big).$$

Работая совместно с моей студенткой А. Жуковой на мехмате МГУ, удалось значительно усилить представленный результат. А именно, нами была доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $k,d,d',N,k^*\in\mathbb{N}, d_*=\max(d,d'),\varepsilon>0,r>0,R>0$. Существуют такие числа $C:=C(k,d,d',N,k^*,\varepsilon,r,R)$ и $c:=c(d,d',N,k^*,\varepsilon,r)$, что для каждой пары наборов $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{Y_n\}_{n=1}^\infty$ независимых N-мерных случайных векторов, удовлетворяющих условию $\mathfrak{D}(\varepsilon,r,R)$, и для каждой пары наборов коэффициентов $a=(a_1,\ldots,a_d)$, $a_m\colon(\mathbb{N}^3)^m\to\mathbb{R}$, $b=(b_1,\ldots,b_{d'})$, $b_m\colon(\mathbb{N}^3)^m\to\mathbb{R}$, имеет место неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}\big(Q_{d,k^*}(a,X),Q_{d',k^*}(b,Y)\big)\le C\Big([a_d]^{-\frac{1}{k^*d}}+[b_{d'}]^{-\frac{1}{k^*d'}}+1\Big)\big[d_{\mathrm{KR}}\big(Q_{d,k^*}(a,X),Q_{d',k^*}(b,Y)\big)\big]^{\frac{1}{1+d_*k^*}}$$
$$+12d\exp\Big(-\frac{c[a_d]^2}{\delta(a_d)}\Big)+12d'\exp\Big(-\frac{c[b_{d'}]^2}{\delta(b_{d'})}\Big).$$

При доказательстве используются ранее установленные результаты о дробной регулярности плотностей полиномиальных образов логарифмически вогнутых случайных векторов. В настоящее время идет активная работа над подготовкой публикации.

3. Функциональные аналоги задачи Шепарда.

Классическая задача Шепарда из выпуклой геометрии спрашивает, верно ли, что

$$\lambda_n(K)\le\lambda_n(V)$$

для каждой пары выпуклых тел $K,V\subset\mathbb{R}^n$, для которых

$$\lambda_{n-1}(P_H(K))\le\lambda_{n-1}(P_H(V)) \tag{1}$$

для каждой $(n-1)$-мерной гиперплоскости H. Здесь P_H обозначает оператор ортогональной проекции на гиперплоскость H, а λ_n обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^n$. Известно, что в такой постановке ответ на вопрос отрицательный в пространствах достаточно большой размерности. Однако, в предположении (1) имеет место неравенство

$$\lambda_n(K) \le C_n \lambda_n(V),$$

где $c_1\sqrt{n} \le C_n \le c_2\sqrt{n}$ для некоторых числовых постоянных $c_2 > c_1 > 0$.

Естественным шагом от выпуклых тел в $\mathbb{R}^n$ является переход к так называемым логарифмически вогнутым функциям. Напомним, что $f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ называется логарифмически вогнутой, если

$$f(tx+(1-t)y) \ge [f(x)]^t \cdot [f(y)]^{1-t} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0,1).$$

Пусть

$$Q^n := \big\{ f\colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)\colon f \text{— логарифмически вогнутая}, f \in L^1(\mathbb{R}^n), \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} > 0 \big\}.$$

Известно, что функция f из класса Q^n всегда является функцией ограниченной вариации, т.е. такой функцией из $L^1(\mathbb{R}^n)$, что для каждого $\theta \in \mathbb{R}^n$, найдется ограниченная борелевская мера $D_\theta f$ на $\mathbb{R}^n$, с которой выполнена формула интегрирования по частям

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial_\theta \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, D_\theta f(dx) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Пусть $BV(\mathbb{R}^n)$ — класс всех функций ограниченной вариации. Отметим, что пространство Соболева $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ вложено в пространство всех функций ограниченной вариации $BV(\mathbb{R}^n)$.

Работая совместно с моим студентом В. Горевым на мехмате МГУ, удалось получить следующий функциональный аналог задачи Шепарда из выпуклой геометрии.

Теорема 7. *Пусть $f_1 \in BV(\mathbb{R}^n)$ и пусть $f_2 \in Q^n$. Предположим, что*

$$\|D_\theta f_1\|_{\mathrm{TV}} \le \|D_\theta f_2\|_{\mathrm{TV}} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^n,\ |\theta| = 1,$$

где $\|\cdot\|_{TV}$ — полная вариация меры. Тогда

$$\|f_1\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \le 8\sqrt{n}\|f_2\|^{\frac{1}{n}}_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f_2\|^{\frac{n-1}{n}}_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Список литературы

[1] V. Bally, L. Caramellino, *Total variation distance between stochastic polynomials and invariance principles.* Ann. Probab., 2019, 47, 3762–3811.

[2] F. Dai, E. Kosov, V. Temlyakov, Some improved bounds in sampling discretization of integral norms, arXiv:2208.09762

[3] F. Dai, A. Prymak, A. Shadrin, V. Temlyakov, S. Tikhonov, Sampling discretization of integral norms, Constr. Approx., 2021, 54:3, 455–471.

[4] E.D. Kosov, Marcinkiewicz-type discretization of L^p-norms under the Nikolskii-type inequality assumption, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021, 504:1, 125358.

[5] I. Nourdin, G. Poly, An invariance principle under the total variation distance. Stochastic Processes and their Applications, 2015, 125:6, 2190–2205.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы:

1. E.D. Kosov, Regularity of linear and polynomial images of Skorohod differentiable measures, Adv. Math., 2022, 397, 108193.

2. B.S. Kashin, E.D. Kosov, I.V. Limonova, V.N. Temlyakov, Sampling discretization and related problems, J. Complexity, 2022, 71, 101653.

3. Е.Д. Косов, Распределения многочленов от гауссовских случайных величин при ограничениях на степени переменных, Функц. анализ и его прил., 2022, 56:2, 29–38.

4. Е.Д. Косов, Распределения многочленов второй степени от гауссовских случайных величин, Матем. заметки, 2022, 111:1, 67–79.

Работы, принятые к печати:

5. Е.Д. Косов, Замечания о дискретизации интегральных норм функций по значениям в точках, Труды МИАН, 2022, 318.

Препринты:

6. F. Dai, E. Kosov, V. Temlyakov, Some improved bounds in sampling discretization of integral norms, arXiv:2208.09762
7. V. Gorev, E. Kosov, Functional analogs of the Shephard, Busemann-Petty, and Milman problems, arXiv:2208.13308

3. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах
1. E.D. Kosov, New bounds in the problem of sampling discretization of L^p norms, International conference «Applied Functional Analysis», online, Oaxaca, Mexico, 28 августа – 2 сентября 2022.
2. Е.Д. Косов, Новые оценки в задаче дискретизации интегральных норм, Вторая конференция Математических центров России, 7–11 ноября 2022.
3. Е.Д. Косов, Линейные и полиномиальные образы дифференцируемых мер, Семинар по теории функций действительного переменного под руководством Б.С. Кашина и С.В. Конягина, 11 марта 2022.
4. Е.Д. Косов, Оценки расстояния по вариации и их связь с регулярностью распределений, Большой семинар кафедры теории вероятностей МГУ, 6 апреля 2022.
5. Е.Д. Косов, Исследование регулярности образов мер с помощью модулей непрерывности, Семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского), 25 мая 2022.

4. Работа в научных центрах и научных группах.

• Работаю старшим научным сотрудником отдела теории функций Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

• Являюсь сотрудником двух лабораторий: "Международной лаборатории стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных" и лаборатории "Многомерная аппроксимация и приложения".

5. Педагогическая деятельность

• Являюсь научным руководителем В. Горева и А. Жуковой на мехмате МГУ.

• В этом году вел следующие занятия:

Весна 2022:

Факультет Компьютерных Наук ВШЭ: лекции и семинары по теории вероятностей и математической статистике, лекции по математическому анализу;

Мехмат МГУ: лекции и семинары по функциональному анализу, спецкурс «Изопериметрические неравенства и KLS гипотеза».

Летняя школа «Современная математика» имени Виталия Арнольда: миникурс «Симметризация Штейнера и классические неравенства выпуклой геометрии».

Осень 2022:

Факультет Компьютерных Наук ВШЭ: лекции и семинары по теории вероятностей, лекции и семинары по математическому анализу;

Мехмат МГУ: лекции по функциональному анализу.

НОЦ МИАН: спецкурс «Метод чейнинга и его приложения в вопросах анализа».

6. Отчет за три года

Все заявленные конкретные результаты из плана исследований были получены еще за первые два года трехлетнего срока. Во время данного периода, работая по направлениям исследований лаборатории “Многомерная аппроксимация и приложения” при мехмате МГУ, я стал активно заниматься задачами дискретизации интегральных норм. За эти три года, работая совместно с коллективом лаборатори, удалось существенно продвинуться в этой проблематике. В частности, были получены оценки количества точек, достаточного для дискретизации интегральных норм на конечномерных подпространствах, близкие к оптимальным. Однако, вопрос о точном поведении данной величины в зависимости от размерности пока остается открытым.

В задачах о свойствах распределений многочленов от различных классов случайных величин также были получены существенные результаты, как усиливающих ранее известные теоремы, так и дающие новое понимание свойств таких распределений. В частности, были существенно обобщены и дополнены результаты В.В. Ульянова, И. Нурдина, В. Балли.

Наконец, совместно с одним из моих студентов начато изучение функциональных аналогов теорем выпуклой геометрии о сравнении n-мерных характеристик функций по известным соотношениям на характеристики меньшей размерности.

Подводя итог, считаю, что эти три года прошли для меня очень продуктивно. Помимо уже полученных новых результатов, работа над тематиками проекта привела к постановкам многих новых интересных задач, которые планируется рассмотреть в дальнейшем. Я искренне благодарен фонду Молодая Математика России за оказанную поддержку.