Отчёт за 2021 год по проекту «О свободных теориях и мотиве проективной квадрики»

Андрей Лавренов

Обзор проекта

Проект посвящён изучению обобщённых теорий когомологий в смысле Левина–Мореля на категории гладких многообразий над полем характеристики 0, а также связанных с ними категорий (чистых) мотивов гладких проективных многообразий.

В первую очередь, мы изучаем однородные проективные многообразия и (алгебраические) K-теории Моравы $\mathrm{K}(n)$: это серия обобщённых теорий когомологий, которая в некотором смысле стартует с K-теории Гротендика и сходится к группам Чжоу CH^* по модулю рациональной эквивалентности.

В качестве главных направлений исследований в 2021 году я формулировал изучение структуры алгебры $\mathrm{K}(n)^*(G)$ для расщепимых алгебраических групп, в первую очередь, простых групп G типов B_l и D_l, а также изучение естественной структуры ко-умножения на $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$.

Эти задачи действительно удалось решить.

1 Полученные результаты

Вычисление когомологий групп Ли было классической задачей алгебраической топологии, уходящей корнями к работам Картана, и давшей начало теории алгебр Хопфа. Единообразное описание когомологий простых компактных групп Ли и колец Чжоу соответствующих алгебраических групп дано в работе Каца [Kac]. Топологическая K-теория групп Ли вычислена в работах Атьи–Хирцебруха и других, а (высшая) алгебраическая K-теория — в работах Левина, Меркурьева и других.

В свою очередь топологическая K-теория Моравы вычислена не для всех простых компактных групп Ли, более того, иногда известна структура абелевой группы, но неизвестно умножение. В частности, для ортогональных групп известна аддитивная структура топологической K-теории Моравы благодаря Рао [R90] и Нишимото [N01], однако умножение вычислено только частично в работах Рао [R97]. Более того, для полуспинорных групп аддитивная стуктура топологической K-теории Моравы может быть получена имеющимися методами, однако эти результаты по-видимому нигде не опубликованы. В топологии ситуация усложняется ещё и тем, что для $p = 2$ на K-теории Моравы существует два равноправных выбора структуры умножения.

Алгебраическая K-теория Моравы расщепимых ортогональных групп оказывается устроена проще. Нам удалось описать $\mathrm{K}(n)^*(G)$ *как алгебру* для всех классических групп G.

В 2020 году совместно с Виктором Петровым мы доказали теорему о стабилизации $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ с ростом m, после чего Павел Сечин вычислил таблицу умножения в $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ до наступления стабилизации. Соединив наши результаты, мы получили описание $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ как алгебры для любых m и n. Аналогичные результаты были получены и для специальной ортогональной группы.

В 2021 году мы описали структуру алгебры для остальных простых групп G типа D_l, то есть, проективных ортогональных и полуспинорных групп. Строго говоря, для этих групп уже не происходит стабилизации, тем не менее соединяя нашу технику с техникой Павла Сечина, удалось получить полное описание структуры алгебры для $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{PGO}^+_{2l})$, и, как следствие, для $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{HSpin}_{4k})$.

Теорема. *Для любых $n \geq 1$ и $l \geq 2$ имеет место изоморфизм алгебр*

$$\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{PGO}^+_{2l}) \cong \mathbb{F}_2[f_1, e_1, e_3, \ldots, e_{2r-1}]/(f_1^t,\, e_{2i-1}^{2^{k_i}}),$$

где f_1 имеет степень 1, e_i имеет степень i, $r = \min\left(2^{n-1},\, \lfloor l/2 \rfloor\right)$, $t = \min(n, \nu_2(l))$, и

$$k_i = \min\left(\left\lfloor \log_2\left(\frac{2^{n+1}-1}{2i-1}\right)\right\rfloor,\ \left\lfloor \log_2\left(\frac{2l-1}{2i-1}\right)\right\rfloor\right).$$

Эта же техника применима и для некоторых исключительных групп. Например, в работах Нобуаки Ягиты [Ya05] и Виктора Петрова и Никиты Семёнова [PS21], вычислена структура алгебры $\mathrm{K}(2)^*(G)$ для односвязной простой группы G типа E_6 для $p = 3$. Развитая нами техника позволяют описать структуру алгебры также и для присоединённой группы типа E_6.

Другим естественным направлением, развивающим результаты прошлогодних исследований, было вычисление стуктуры *ко-алгебры* $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$. Нам удалось получить ответ, соединив нашу технику с частичными вычислениями в топологии.

Напомним, что из универсальности алгебраических кобордизмов Левина–Мореля Ω^*, для любой простой компактной группы Ли K определено естественное отображение

$$\Omega^*(K_{\mathbb{C}}) \to \mathrm{MU}^*(K)$$

между алгебраическими кобордизмами соответствующей расщепимой алгебраической группы $K_{\mathbb{C}}$ и комплексными кобордизмами $\mathrm{MU}^*(K)$. Нобуаки Ягита сформулировал гипотезу, описывающую ядро и образ этого отображения, однако на настоящий момент она остаётся открытой [Ya05].

С другой стороны, используя наше вычисление $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$, мы смогли показать, что естественное отображение в топологическую K-теорию Моравы

$$\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m) \to \mathrm{K}(n)^*_{\mathrm{top}}\big(\mathrm{SO}(m)\big)$$

является вложением. Более того, мы смогли воспользоваться частичными вычислениями Рао структуры алгебры и ко-алгебры на $\mathrm{K}(n)^*_{\mathrm{top}}\big(\mathrm{SO}(m)\big)$, и получить полное описание ко-умножения на алгебраической K-теории Моравы.

Теорема. *Приведённое ко-умножение $\widetilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - x\otimes 1 - 1\otimes x$ на алгебре Хопфа*

$$\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m) \cong \mathbb{F}_2[e_1, e_2, \dots, e_s]/(e_i^2 - e_{2i})$$

где $s = \min\left(\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor,\, 2^n-1\right)$ и e_{2i} обозначает 0 при $2i > s$, определяется следующими формулами:

$$\widetilde{\Delta}(e_{(2k)}) = \sum_{i=0}^{\nu_2(k)} e_{(k/2^i)} \otimes e_{(k/2^i)} \prod_{j=0}^{i-1} \left(e_{(k/2^j)}\otimes 1 + 1\otimes e_{(k/2^j)}\right),$$

где через (t) обозначено число 2^n-1-t, $k>0$ и $k/2^{\nu_2(k)}$ нечётное целое число, и

$$\widetilde{\Delta}(e_{2^n-1}) = e_{2^n-1}\otimes e_{2^n-1}.$$

Отметим, что $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$ ко-действует на $\mathrm{K}(n)^*(X)$ соответствующих ортогональных грассманианов X, и при этом разложение мотива Моравы $\mathcal{M}_{\mathrm{K}(n)}(X)$ согласовано с разложением $\mathrm{K}(n)^*(X)$ как $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$-комодуля. Пользуясь этим, мы вывели из предыдущей теоремы следующий результат.

Теорема. *Пусть $q\colon V\to k$ обозначает общую квадратичную форму с тривиальным дискриминантом размерности m, и $X = \mathrm{Gr}(q)$ — это максимальный ортогональный грассманиан, то есть, многообразие максимальных изотропный подпространств в V. Тогда $\mathrm{K}(n)$-мотив $\mathcal{M}_{\mathrm{K}(n)}(X)$ многообразия X неразложим при $m \le 2^{n+1}-2$, а при $m\ge 2^{n+1}-1$ мотив $\mathcal{M}_{\mathrm{K}(n)}(X)$ раскладывается как $2^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor - 2^n + 2}$ неразложимых слагаемых ранга 2^{2^n-2}.*

Для других классических групп, то есть, имеющих тип A_l или C_l, аналогичные результаты гораздо проще. Так Александр Нешитов вычислил не только K-теорию Моравы, но и алгебраические кобордизмы проективной линейной группы PGL_m пользуясь результатами [GiZa, CZZ]. Из случая присоединённой группы формально выводятся остальные группы данного типа.

Более того, пользуясь той же техникой, мы вычислили алгебраические кобордизмы и от расщепимых групп типа C_l.

Теорема. *Кольцо алгебраических кобордизмов $\Omega^*(\mathrm{PGSp}_{2l})$ совпадает с*

$$\mathbb{L}[x] \Big/ lx^2,\ \binom{l}{2}x^4,\ \binom{l}{3}x^6,\ \dots,\ lx^{2l-2},\ x^{2l},\ F_\Omega(x,\, x)\,,$$

где $\mathbb{L}$ обозначает кольцо Лазара, x имеет степень 1, и F_Ω обозначает универсальный групповой закон. Ко-умножение определяется формулой

$$\Delta(x) = F_\Omega(x\otimes 1,\, 1\otimes x).$$

Описанные результаты разделены между двумя препринтами.

Мы приняли решение расширить препринт 2020 года, включив в него результаты Павла Сечина и наши совместные с ним результаты о группах типа D_l (в новой версии препринта это Параграфы 6 и 7). Кроме того, мы добавили некоторые другие результаты о мотивах Моравы, а именно, обобщили результаты старого Параграфа 7 с квадрик на другие однородные проективные многообразия (теперь это Параграф 9), добавили Следствие 6.14 о максимальных ортогональных грассманианах. В настоящее время обновлённый препринт опубликован на архиве (`arXiv:2011.14720`), и статья подана в журнал.

По результатам, связанным с вычислением ко-умножения, мы готовим к публикации новый препринт. Предварительную версию можно найти по ссылке `shorturl.at/hAEIP`. Перед публикацией на архиве, мы планируем добавить в него обзор результатов в алгебраической топологии и некоторые новые вычисления алгебраической K-теории Моравы *исключительных* групп.

Кроме того, в настоящее время я занимаюсь ещё одной темой, не связанной с K-теорией Моравы. Она посвящена далёким аналогам проблемы Серра и гипотезы Басса–Квиллена.

Хорошо известно, что разные варианты определения алгебраической K-теории и эрмитовой K-теории дают одинаковый ответ. Например, для регулярного кольца R высшая K-теория, определённая через $+$-конструкцию Квиллена, совпадает K теорией Каруби–Вилламайора. Для определения этих теорий используют бесконечномерные аналоги алгебраических групп, такие как GL_∞. Однако и $+$-конструкция Квиллена, и конструкция групп Каруби–Вилламайора имеют смысл и для конечномерных алгебраических групп, и мы задались вопросом о совпадении этих определений.

Из работ Анастасии Ставровой следует совпадение этих подходов для K_1, и для полной линейной группы GL_n совпадение определений для K_2 следует из работ Суслина, ван дер Каллена и Туленбаева. Однако для нестабильной Эрмитовой K-теории этот вопрос был открыт, и мы показали, что для чётных ортогональных групп также имеет место совпадение определений K_2 (при определённых условиях на кольцо). Этот результат является простым следствием следующей доказанной нами теоремы.

Теорема. *Пусть R — произвольное регулярное кольцо, содержащее поле характеристики не 2, и $l \geq 7$, тогда*

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{O}_{2l}(R[t]); \mathbb{Z}) \cong \mathrm{H}_2(\mathrm{O}_{2l}(R); \mathbb{Z}),$$

где $\mathrm{H}_2(-; \mathbb{Z})$ обозначает гомологии дискретной группы.

Аналогичный результат верен и для других групп типа D_l, например, для спинорной. Из него также следует, что для $R = k[t_1, \ldots, t_n]$ кольца многочленов над полем k характеристики не 2 от произвольного числа переменных, группа $\mathrm{Spin}_{2l}(k[t_1, \ldots, t_n])$ допускает задание такими же образующими и соотношениями, как и над полем.

Теорема. *Для $l \geq 7$, поля k характеристики не 2, и произвольного n спинорная группа $\mathrm{Spin}_{2l}(k[t_1, \ldots, t_n])$ совпадает с абстрактной группой, заданной образующими $x_\alpha(r)$, где*

$\alpha \in \mathsf{D}_l$, $r \in k[t_1, \ldots, t_n]$, *и соотношениями*

$$\begin{aligned}
&x_\alpha(r)x_\alpha(s) = x_\alpha(r+s),\\
&[x_\alpha(r),\, x_\beta(s)] = 1 \quad \textit{если} \quad \alpha+\beta \notin \mathsf{D}_l,\\
&[x_\alpha(r),\, x_\beta(s)] = x_{\alpha+\beta}(N_{\alpha\beta}\, rs) \quad \textit{если} \quad \alpha+\beta \in \mathsf{D}_l,\\
&h_\alpha(a)h_\alpha(b) = h_\alpha(ab),
\end{aligned}$$

где $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ *обозначают структурные константы алгебры Ли* $\mathfrak{so}_{2l}$, α, $\beta \in \mathsf{D}_l$, a, $b \in k^\times$, r, $s \in k[t_1, \ldots, t_n]$ *и* $h_\alpha(a) = x_\alpha(a)x_{-\alpha}(-a^{-1})x_\alpha(a-1)x_{-\alpha}(1)x_\alpha(-1)$.

Более того, соединяя наши результаты с теоремой Ашока–Оуа–Вендта, можно показать, что для гладкой нётеровой алгебры R над полем k (характеристики не 2 и $l \geq 7$) верно равенство

$$\pi_2 \mathrm{BO}_{2l}(R)^+ = \pi_1^{\mathbb{A}^1}(\mathrm{O}_{2l})(\operatorname{Spec} R),$$

то есть, вторая гомотопическая группа +-конструкции Квиллена для классифицирующего пространства дискретной группы $\mathrm{O}_{2l}(R)$ совпадает со значением предпучка $\mathbb{A}^1$-фундаментальной группы многообразия O_{2l} на спектре R.

Препринт по результатам этих исследований (`arXiv:2110.11087`) также выложен на архив, и статья подана в журнал.

2 Публикации и препринты

A. Lavrenov, V. Petrov, P. Sechin, N. Semenov, «Morava K-theory of orthogonal groups and motives of projective quadrics» (2021) 1–50, `arXiv:2011.14720`
(это расширенная версия прошлогоднего препринта, добавлены Параграфы 6 и 7, обобщены результаты старого Параграфа 7, теперь это Параграф 9).
A. Lavrenov, V. Petrov, P. Sechin, N. Semenov, «Morava K-theory of split simple groups» (2021) 1–28, `shorturl.at/hAEIP`
(это предварительная версия нового препринта, которую мы готовим к публикации на `arXiv.org` и подаче в журнал).
A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, «On the $\mathbb{A}^1$-invariance of K_2 modeled on linear and even orthogonal groups» (2021) 1–17, `arXiv:2110.11087`.

3 Участие в конференциях и школах

В этом году я рассказывал о своих результатах на конференции «Mini-workshop on Algebraic Geometry», которая проходила 20–22 мая в Санкт-Петербурге, а также на конференции «Linear Algebraic Groups and Related Structures» посвящённой 70-тилетию Николая Гордеева 11–12 ноября в Санкт-Петербурге. Кроме того, я выступал на онлайн семинаре «Quadratic forms, Linear algebraic groups and Beyond» организованным Филиппом Жилем из университета Лиона и Кириллом Зайнуллиным из университета Оттавы, а также выступал с докладами на организованным мной онлайн-семинарах про модули Роста в весеннем семестре, и по геометрической теории квадратичных форм – в осеннем.

4 Работа в научных центрах и международных группах

В этом году у меня была позиция младшего научного сотрудника в международном математическом институте Леонарда Эйлера в Санкт-Петербурге. Двое из моих постоянных соавторов в течение последних лет работают в Германии — это Никита Семёнов из университета им. Людвига-Максимилиана в Мюнхене, и Павел Сечин из университета Регенсбурга. Совместно с Павлом Сечиным мы организовали онлайн семинар по геометрической теории квадратичных форм. Кроме того, с 18 июля по 2 августа этого года я был в командировке в Мюнхене для совместной работы с Никитой Семёновым.

5 Педагогическая деятельность

В этом году в весеннем и осеннем семестре я вёл одну пару в неделю на факультете математики и компьютерных наук в Санкт-Петербургском Государственном Университете.

Список литературы

[CZZ] B. Calmès, K. Zainoulline, C. Zhong, "Equivariant oriented cohomology of flag varieties", *Documenta Math.* Extra Volume: Alexander S. Merkurjev's Sixtieth Birthday (2015) 113–144.

[GiZa] S. Gille, K. Zainoulline, "Equivariant pretheories and invariants of torsors", *Transformation Groups* **17** (2012) 471–498.

[Kac] V. Kac, "Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups", Invent. Math. **80** (1985) 69–79.

[N01] T. Nishimoto, "Higher torsion in the Morava K-theory of $\mathrm{SO}(m)$ and $\mathrm{Spin}(m)$", J. Math. Soc. Japan **53**:2 (2001) 383–394.

[PS21] V. Petrov, N. Semenov, "Hopf-theoretic approach to motives of twisted flag varieties", *Comp. Math.* **157**:5 (2021) 963–996.

[R90] V. Rao, "On the Morava K-theories of $\mathrm{SO}(2n+1)$", *Proc. of AMS* **108**:4 (1990) 1031–1038.

[R97] V. Rao, "Towards the algebra structure of the Morava K-theory of the orthogonal groups", *Manuscr. Math.* **94**:3 (1997) 287–301.

[Ya05] N. Yagita, "Algebraic cobordism of simply connected Lie groups", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **139**:2 (2005) 243–260.