Отчёт Осипова Павла Сергеевича

1. Проведённые исследования

1.1. **Самоподобные гессиановы многообразия.** Рассмотрим риманово многообразие (M, g) с полем ξ, таким что $\mathcal{L}_\xi g = 2g$. Тогда тройка (M, g, ξ) называется **самоподобным многообразием**. Если поле ξ полно, то самоподобным многообразие (M, g, ξ) называется **глобальным**. Термин "самоподобное происходит из того, что поток вдоль полям ξ задаёт однопараметрическую (псевдо)-группу преобразований подобия. Примером глобального самоподобного гессианова многообразия является риманов конус $\left(M \times \mathbb{R}^{>0}, s^2 g_M + ds^2, t\frac{\partial}{\partial s}\right)$.

Я описал структуру самоподобных многообразий.

Теорема 1 ([O1]). *Любое глобальное самоподобное многообразие (C, g, ξ) изоморфно следующему:*

(i) $\left(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \left(dx^i\right)^2, \rho + a\eta\right)$, *где* $a \in \mathbb{R}$, $\rho = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *— радиантное векторное поле и* $\eta = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(x^{2i-1}\frac{\partial}{\partial x^{2i}} - x^{2i}\frac{\partial}{\partial x^{2i-1}}\right)$.

(ii) $\left(\hat{M} = M \times \mathbb{R}^{>0}, \hat{g} = s^2 g_M + s ds \cdot \alpha + ds^2, s\frac{\partial}{\partial s}\right)$, *где s — координта на $\mathbb{R}^{>0}$, g_M — риманова метрика M, α — 1-форма на M и*

$$g_M(X, X) + 2\alpha(X) + 1 > 0, \quad \textit{for any} \quad X \in TM.$$

Любое самоподобное многообразие локально изоморфно глобальному самоподобному.

Самоподобное многообразие (M, g, ξ) называется **потенциальным**, если ξ является градиентом функции.

Теорема 2 ([O1]). *Пусть (M, g, ξ) глобальное потенциальное самоподобное многообразие.*

(i) *Если ξ зануляется в какой-то точке, то (M, g, ξ) — евклидово пространство с радиальным векторным полем* $\left(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \left(dx^i\right)^2, \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

(ii) *Если ξ не зануляется ни в какой точке, то (M, g, ξ) является римановым конусом.*

Плоское аффинное многообразие — это многообразие оснащённое плоской связностью без кручения. Существует эквивалентное определение: плоское аффиное многообразие — это многообразие с аталасом, функции перехода которого аффинны. **Гессианово многообразие** — это плоское аффинное многообразие с римановой метрикой локально являющейся гессианом функции.

Самоподобным гессиановым многообразием (M, ∇, g, ξ) называется гессианово многообразие (M, ∇, g), оснащённое векторным полем ξ, таким что поток вдоль ξ сохраняет аффинную структуру и (M, g, ξ) является самоподобным многообразием.

Поле ρ на плоском аффинном многообразие (M, ∇) называется радиантным, если $\nabla\rho = \mathrm{Id}$. В окрестности каждой точки существует локальная плоская система координат, в которой радиантное поле имеет вид $\rho = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ([Go]). Назовём самоподобное гессианово многообразие (M, ∇, g, ξ) радиантным, если существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda\xi$ — радиантное векторное поле.

Теорема 3 ([O1]). *Пусть (C, ∇, ξ) — самоподобное гессианово многообразие. Поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда (C, ∇, ξ) локально изоморфно прямому произведению радиантных гессиановых многообразий. Кроме того, если поле ξ*

потенциально и зануляется в какой-то точке, то (C, ∇, g, ξ) — радиантное гессианово многообразие с радиантным векторным полем $\rho = \xi$.

1.2. **Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия.** Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется **регулярным**, если он не соержит ни одной полной прямой. Трубчатая окрестность регулярного выпуклого конуса $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфна ограниченно обрласти в $\mathbb{C}^n$ ([VGP]). Все комплескные области, возникающие таким образом, называетются **областями Зигеля первого рода**. Мы будем рассматривать аффинные автоморфизмы конусов и комплексные аффинные автоморфизмы соответствющих трубчатых областей. В этих соглашениях область $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ однородна тогда и только тогда, когда конус V однороден. Однородные выпуклый конус допускает инвариантную гессианову структуру, по ней можно построить инвариантную кэлерову структуру на соответствующей области Зигеля первого рода ([VGP]).

Я модифицирую конструкцию инвариантной кэлеровой структуры на однородных областях Зигеля первого рода для получения некоторого класса однородных конформно кэлеровых многообразий.

Однородным (глобально) конформно кэлеровым многообразием называется однородное комплексное многообразие (X, G, I) с G-инвариантной римановой метрикой $g_{c.K.}$ конформно эквивалентной некоторой кэлеровой метрике $g_{K.}$ (метрика $g_{K.}$ не обязательно G-инвариантна).

Теорема 4 ([O2]). *Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное гессианово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда TM допускает однородную конформно кэлерову структуру.*

В частности, я строю инвариантную конформно кэлерову метрику на любой области Зигеля первого рода. Эта конформно кэлерова метрика не конформно экививалентна инвариантной кэлеровой метрике описаной в [VGP].

Для продолжения работы планируется исследовать кривизну полученных конформно кэлеровых метрик. Конкретный вопрос следующий: когда кривизна Риччи построенной конформно кэлеровой метрики отрицательно определена?

1.3. **Унимодулярные локально конформно кэлеровы алгебры Ли.** Условие, что 2-форма Ω на многообразие M локально конформно эквивалентна некоторой замкнутой форме, равносильно существованию замкнутой 1-формы θ, такой что $d\Omega = \theta \wedge \Omega$. Отсюда возникает следующее определение. **Локально конформно кэлеровым (l.c.K.) многообразием** (M, Ω, θ, I) называется комплексное многообразие (M, I), оснащённое 2-формой Ω и замкнутой 1-формой θ, такими что $d\Omega = \theta \wedge \Omega$ и $\Omega(*, I*)$ — положительно определена.

Аналогично, l.c.K. алгеброй Ли называется набор $(\mathfrak{g}, \Omega, \eta, I)$, где θ — замкнутая 1-форма, I — комплексная структура, Ω — 2-форма, такая что $d\Omega = \theta \wedge \Omega$ и $\Omega(*, I*)$ — положительно определена. Любая l.c.K. алгебра Ли является алгеброй Ли левоинвариантных полей к группе Ли с левоинвариантной l.c.K. структурой.

Я занимаюсь классификацией l.c.K алгебр Ли. В настоящий момент я близок к классификации алгебр из следующего подкласса. **Точной l.c.K. алгеброй Ли** называется l.c.K. алгебра Ли вида

$$(\mathfrak{g}, \Omega = d\eta + \theta \wedge \eta, \theta, I)\,,$$

где η — 1 форма. В этом случае форма Ω точна относительно дифференциала Морса-Новикова $d_\theta(*) = d(*) + \theta \wedge (*)$

Симплектическим дифференцирование на симплектической алгебре Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ называется отображение $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ удовлетворяющее условиям $D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY]$ и $\omega(DX,Y) + \omega(X,DY) = 0$ для любых $X, Y \in \mathfrak{g}$. Я доказал следующую теорему:

Теорема 5. *Имеется 1-1 соответствие между $2n+2$-мерными унимодулярными точными l.c.K. алгебрами Ли и $2n$-мерными унимодулярными кэлеровыми алгебрами Ли, оснащёнными симплектическими дифференцированиями.*

Унимодулярные кэлеровы алгебры Ли устроены просто. Любая такая группа является расширением абелевой групп при помощи абелевой [H]. Таким образом для классификации унимодулярных точных l.c.K достаточно описать симплектические дифференцирования для каждой унимодулярной кэлеровы алгебры. В настоящий момент я занимаюсь этим.

2. Конференции и школы

"Зумерфест: конференция молодых учёных по алгебраической геометрии"11-12 июля 2020, онлайн.

Однодневная конференция памяти Андрея Николаевича Тюрина, 28 октября 2020, онлайн.

3. Опубликованные и поданные в печать работы

В этом году я завершил работу [O1] и отправил в журнал Transformation Groups. Кроме того, я опубликовал препринт [O2].

4. Работа в научных центрах и международных группах

В этом году я работал стажёром-исследователем в Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений (НИУ ВШЭ).

5. Преподавательская деятельность

В этом году я вёл семинары по математике на образовательной программе "Философия"НИУ ВШЭ.

Список литературы

[Go] W. M. Goldman, *Projective geometry on manifolds*, lecture Notes for Mathematics 748B, Spring 1988, University of Maryland.

[H] 4. J. Hano, *On Kaehlerian homogeneous spaces of unimodular Lie groups*, Amer.]. Math. **79** (1957), 885-900.

[O1] P. Osipov *Selfsimilar Hessian manifolds*, preprint, arXiv:1908.01731.

[O2] P. Osipov *Selfsimilar Hessian and conformally Kähler manifolds*, preprint, arXiv:2012.03791, submitted to Transfornation Groups.

[VGP] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 404-437.