Отчёт Осипова Павла Сергеевича

1. Проведённые исследования и опубликованные работы

1.1. **Самоподобные гессиановы многообразия.** Работа [O1] опубликована в Journal of Geometry and Physics.

Самоподобный римановы многообиразием называется риманово многообразие (C, g), оснащённое полем ξ, таким что $\mathfrak{L}_\xi g = 2g$. Самоподобное многообразие (M, g, ξ) называется **потенциальным**, если ξ является градиентом функции. **Плоское аффинное многообразие** — это многообразие оснащённое плоской связностью без кручения. **Самоподобным гессиановым многообразием** (M, ∇, g, ξ) называется гессианово многообразие (M, ∇, g), оснащённое векторным полем ξ, таким что поток вдоль ξ сохраняет аффинную структуру и (M, g, ξ) является самоподобным многообразием.

Поле ρ на плоском аффинном многообразие (M, ∇) называется радиантным, если $\nabla\rho = \mathrm{Id}$. В окрестности каждой точки существует локальная плоская система координат, в которой радиантное поле имеет вид $\rho = \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Назовём самоподобное гессианово многообразие (M, ∇, g, ξ) радиантным, если существует такое $\lambda \neq 0$, что $\lambda\xi$ — радиантное векторное поле.

Теорема 1 ([O1])**.** *Пусть (C, ∇, ξ) — самоподобное гессианово многообразие. Поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда (C, ∇, ξ) локально изоморфно прямому произведению радиантных гессиановых многообразий. Кроме того, если поле ξ потенциально и зануляется в какой-то точке, то (C, ∇, g, ξ) — радиантное гессианово многообразие с радиантным векторным полем $\rho = \xi$.*

1.2. **Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия.** Статья [O2] опубликована в Annals of Global Analysis and Geometry.

Открытый выпуклый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется **регулярным**, если он не соержит ни одной полной прямой. Трубчатая окрестность регулярного выпуклого конуса $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ биголоморфна ограниченно обрласти в $\mathbb{C}^n$. Все комплесквые области, возникающие таким образом, называетются **областями Зигеля первого рода**. Мы будем рассматривать аффинные автоморфизмы конусов и комплексные аффинные автоморфизмы соответствющих трубчатых областей. В этих соглашениях область $V + \sqrt{-1}\mathbb{R}^n$ однородна тогда и только тогда, когда конус V однороден. Однородные выпуклый конус допускает инвариантную гессианову структуру, по ней можно построить инвариантную кэлерову структуру на соответствующей области Зигеля первого рода.

Я модифицирую конструкцию инвариантной кэлеровой структуры на однородных областях Зигеля первого рода для получения некоторого класса однородных конформно кэлеровых многообразий и однородных конформно гиперкэлеровых многообразий.

Однородным (глобально) конформно кэлеровым многообразием называется однородное комплексное многообразие (X, G, I) с G-инвариантной римановой метрикой $g_{c.K.}$ конформно эквивалентной некоторой кэлеровой метрике $g_{K.}$ (метрика $g_{K.}$ не обязательно G-инвариантна).

Теорема 2 ([O2])**.** *Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное гессианово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда TM допускает однородную конформно кэлерову структуру.*

В частности, я строю инвариантную конформно кэлерову метрику на любой области Зигеля первого рода.

Теорема 3 ([O2]). *Пусть (M, ∇, g, ξ) односвязное самоподобное специальное кэлерово многообразие, ξ полно и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g) сохраняющих ξ. Положим, что G действует свободно и транзитивно на линии уровня $\{g(\xi, \xi) = 1\}$. Тогда T^*M допускает однородную конформно гиперкэелерову структуру.*

1.3. **Статистические алгебры Ли постоянной кривизны и локально конформно кэлеровы алгебры Ли.** Работа [O3] опубликована в Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie. Статистической алгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$ оснащённое плоской связностью без кручения ∇ и билинейной формой g такими, что тензор ∇g симметричен по трём аргументам. Статистическая алгебра Ли является статистической алгеброй Ли постоянной кривизны C, если тензор кривизны связности ∇ равен

$$\theta(X, Y)(Z) = c(g(Y, Z)Z - g(X, Z)Y)$$

для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Локально комформно симлектической алгеброй Ли называется алгебра Ли $\mathfrak{g}$, оснащённая 2-формой ω и 1-формой θ такими что $d\omega = \theta \wedge \omega$. Локально комформно кэлеровой алгеброй Ли называется Локально комформно симлектическая алгеброй Ли $\mathfrak{g}, \omega, \theta$ вместе с комплексной структурой I, такие что билинейная форма $\omega(*, I*)$ положительно определена. Я строю по любой n-мерной статистической алгебре Ли $2n + 2$-мерную локально конформно кэлерову алгебры Ли.

1.4. **Локально конформно гессиановы.** Помимо прочего. Я опубликовал препринт [O4].

Я определяю локально конформно гессиановы многообразия по аналогии с локально конформно кэлеровыми многообразиями. **(Радиантным) локально конформно гессиановым многообразием** называется многообразие, универсальная накрывающего которого оснащена (радиантной) гессиановой структурой такой, что группа монодромий действует гомотетиями. Соответствующее поле гомотетий гессиановой структуры называется полем Ли.

Теорема 4. *Любое компактное локально конформно гессианово многообразие с киллинговым полем Ли является радиантным.*

2. Доклады и конференции

Доклад "Самоподобные гессиановы многообразия семинаре "Геометрические структуры на многообразия"09.09.2022.

Доклад "Специальные кэлеровы многообразия и интегрируемые структуры вторая конференция математических центров России, секция "Алгебраическая геометрия 08.11.2022.

3. Работа в научных центрах и международных группах

В этом году я работал стажёром-исследователем в Лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений (НИУ ВШЭ).

4. Педагогическая практика

В я вёл семинар по математике на факультете философии, по линейной алгебре на факультете физики и по математическому анализу на факультете математики.

5. Итоги трёх лет

Были опубликовано 3 работы и ещё одна отправлена в Journal of Geometry and Physics. Заявленные в заявке результаты о самоподобных Гессиановых многообразиях уточнены, дополнены и опубликованы в [O1]. Написана работа о применении r-отображений к самоподобным гессиановым многообразиям и c-отображений к самоподобным специальным кэлеровым многообразиям. Эти многообразия являются конусами над специальными вещественными и специальными кэлеровым многообразиями упоминаемыми в заявке. Отдельно разобрана конструкция для случая групп и алгебр Ли [O3]. Кроме того, в [O3] описан вещественный аналог сасакиевых многообразий: таким являются статистические постоянной кривизны. В работе [O4] введены специальные гессиановы многообразия и описана их связь со статистическими многообразиями постоянной кривизины.

Акцент был смещён в указанные выше темы. Упомянутым в заявке неравенством Милнора-Вуда я не занимался.

Список литературы

[O1] P. Osipov, *Selfsimilar Hessian manifolds*, J. Geom and Phys, 175, (2022).
[O2] P. Osipov, *Self-similar Hessian and conformally Kähler manifolds*, Ann Glob Anal Geom (2022).
[O3] P. Osipov, *Statistical Lie algebras oa constant curvature and locally conformally Kähler Lie algebras*, Bull. Math. Roumanie, 65(3) (2022).
[O4] P. Osipov, *Locally conformally Hessian and statistical manifolds*, arxiv:4481361.