Отчет по конкурсу “Молодая математика России” за 2020 год

А.А. Сагдеев

1 Результаты, полученные в этом году

Задачи, изучаемые автором в этом году, берут свое начало в 1950 году со знаменитого вопроса Нельсона о том, какого минимального числа цветов $\chi(\mathbb{R}^2)$ достаточно для того, чтобы раскрасить евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ так, что никакие две точки на единичном расстоянии не оказались бы покрашены в один и тот же цвет.

Несмотря на простоту формулировки этого вопроса, на данный момент известно только, что

$$5 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7,$$

причем неравенство $\chi(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$ было доказано только в 2018 году[1].

Пожалуй, самым естественным обобщением данного вопроса является задача о вычислении определяемого абсолютно аналогично хроматического числа $n-$мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Наилучшие оценки при $n \to \infty$ на сегодняшний день таковы:

$$(1.239... + o(1))^n \leqslant \chi\left(\mathbb{R}^n\right) \leqslant (3 + o(1))^n .$$

Верхняя оценка получена в 1972 году Ларманом и Роджерсом[2], а нижняя — в 2000 году Райгородским[3]. Однако, существуют и более далекоидущие обобщения данной задачи, среди которых выделим следующее.

Пусть $\mathcal{X} = (X, d_X)$, $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ — произвольные метрические пространства. Подмножество $X' \subset X$ мы будем называть *копией* пространства $\mathcal{Y}$, если существует биективное отображение $f : Y \to X'$ такое, что $\forall\, y_1, y_2 \in Y$ справедливо, что $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$. *Хроматическим числом* $\chi\left(\mathcal{X}; \mathcal{Y}\right)$ *пространства* $\mathcal{X}$ *с запрещенным пространством* $\mathcal{Y}$ называется минимальное число цветов, которых достаточно для такой раскраски множества X, при которой ни одна

[1] A.D.N.J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least* 5, Geombinatorics, 28 (2018), 18 - 31.

[2] D.G. Larman, C.A. Rogers, *The realization of distances within sets in Euclidean space*, Mathematika, 19 (1972), 1-24.

[3] А.М. Райгородский, *О хроматическом числе пространства*, Успехи мат. наук, 55 (2000), N2, 147 - 148.

копия $X' \subset X$ пространства $\mathcal{Y}$ не является полностью одноцветной. Нетрудно видеть, что если $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, а $\mathcal{Y}$ — это пара точек на единичном расстоянии, то только что определенная величина $\chi(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ в точности совпадает с $\chi(\mathbb{R}^n)$, так что такая постановка задачи действительно является обобщающей.

В рамках *евклидовой теории Рамсея*[456] изучается ситуация, когда $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$, а пространство $\mathcal{Y}$ является некоторым конечным подмножеством $\mathbb{R}^n$ с индуцированной на нем естественной метрикой. Евклидова теория Рамсея представляет из себя бурно развивающийся, богатый как красивыми результатами, так и нетривиальными открытыми вопросами раздел комбинаторики.

В этом году в двух совместных работах с А. Купавским мы изучили традиционно важный для евклидовой теории Рамсея вопрос об экспоненциальности роста величины $\chi(\mathbb{R}^n; \mathcal{Y})$ при $n \to \infty$ для случая пространства с чебышёвской метрикой. Дадим формальное определение.

Пусть $\mathbb{R}^n_\infty = (\mathbb{R}^n, \ell_\infty)$, где ℓ_∞ — стандартная чебышёвская метрика, определяемая равенством $\ell_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i |x_i - y_i|$ для всех $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ из $\mathbb{R}^n$. Конечное метрическое пространство $\mathcal{Y}$ называется *экспоненциально ℓ_∞−рамсеевским*, если существует константа $c = c(\mathcal{Y}) > 1$, с которой при $n \to \infty$ верно неравенство $\chi(\mathbb{R}^n_\infty; \mathcal{Y}) > (c + o(1))^n$. Центральным доказанным нами результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Любое конечное метрическое пространство $\mathcal{Y}$ является экспоненциально ℓ_∞−рамсеевским.*

Отметим, что в рамках евклидовой теории Рамсея данный вопрос является намного более сложным, а критерий экспоненциальной ℓ_2−рамсеевости все еще неизвестен[7].

Наиболее важными частными случаями пространств $\mathcal{Y}$, рассмотрение которых позволило нам доказать теорему 1 во всей ее общности, являются *батоны* $\mathcal{B}_k$, определяемые при каждом натуральном k как множество точек $\{0, 1, \ldots, k\}$ с естественной метрикой на них.

На следующую доказанную нами теорему о батонах $\mathcal{B}_k$ можно смотреть как на чебышёвский аналог знаменитой теоремы Хейлса-Джуэтта утверждающей, что всякое “достаточно плотное” подмножество многомерного куба обязательно содержит в себе его “диагональ”.

---

[4] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems I*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14 (1973), N3, 341 - 363.

[5] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems II*, In A. Hajnal, R. Rado and V. Sós, eds., Infinite and Finite Sets I, North Holland, Amsterdam, 1975, 529 - 557.

[6] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[7] I. Leader, P.A. Russell, M. Walters, *Transitive sets in Euclidean Ramsey theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 119 (2012), N2, 382 - 396.

Теорема 2. *Пусть n и k — произвольные натуральные числа. Рассмотрим $n-$мерный куб $\{0, 1, \ldots$ $\ldots, k\}^n$, наделенный чебышёвской метрикой ℓ_∞. Тогда любое его подмножество X такое, что $|X| > k^n$ обязательно содержит внутри себя копию $\mathcal{B}_k$.*

Применив принцип Дирихле к результату теоремы 2 нетрудно убедиться в справедливости неравенства $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) \geqslant \left(\frac{k+1}{k}\right)^n$. Нам удалось применить вероятностный метод в комбинаторике для доказательства близкой в асимптотическом смысле верхней оценки.

Теорема 3. *При каждом фиксированном натуральном k верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = \left(\frac{k+1}{k} + o(1)\right)^n$$

при $n \to \infty$.

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 1 гарантирует лишь экспоненциальность роста величины $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k)$ при каждом фиксированном k и стремящемся к бесконечности n, в то время как теорема 3 предъявляет *точное* основание этой экспоненты. Отметим, для случая евклидовой метрики ℓ_2 точное основание соответствующей экспоненты не известно ни для какого пространства $\mathcal{Y}$, и даже для простейшего случая двухточечного $\mathcal{Y}$ известны только довольно далекие друг от друга уже упоминавшиеся оценки 1.239... и 3.

Нам было бы интересно найти точное основание экспоненты и для других метрических пространств $\mathcal{Y}$, отличных от $\mathcal{B}_k$. На настоящий момент мы сделали это только для пространств $\mathcal{B}(1,2) = \{0,1,3\}$ и $\mathcal{B}(1,3) = \{0,1,4\}$, однако есть основания полагать, что данную технику можно будет обобщить и другие случаи.

Теорема 4. *При $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(1,2)) = \left(\frac{5}{3} + o(1)\right)^n,$$

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(1,3)) = \left(\frac{5}{3} + o(1)\right)^n.$$

2 Опубликованные и поданный в печать работы

1. А. Купавский, А. Сагдеев, *Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой*, Успехи Математических Наук, 75 (2020), N5, 191-192.

2. A. Kupavskii, A. Sagdeev, *All finite sets are Ramsey in the maximum norm*, arXiv:2008.02008, *to appear in Forum of Mathematics, Sigma.*

3 Участие в конференциях и школах

- Международная конференция “Combinatorics and Geometry Days III”, МФТИ, Москва, 2-4 декабря.
- Воркшоп по Открытым Проблемам в Комбинаторике и Геометрии II, Адыгея, 28 сентября - 4 октября.
- Международная конференция “Probabilistic Combinatorics Online 2020”, МФТИ, Москва, 23-25 сентября.
- Международная конференция “Combinatorics and Geometry Days II”, МФТИ, Москва, 13-16 апреля.

4 Педагогическая деятельность

Весенний семестр 2020:

- Семинарист по курсу “Дискретная Математика” у двух групп физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ.

Осенний семестр 2020:

- Семинарист по курсу “Дискретная Математика” у двух групп физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ.