‘Молодая Математика России’

Арсений Сагдеев

Отчет за 2022 год

1 Новые результаты

1.1 Экстремальная теория множеств

Семейство из $k \geq 3$ множеств называется *слабым k-подсолнухом* если все их попарные пересечения имеют одинаковую мощность. Обозначим за $G_k(n)$ наибольший размер семейства $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ подмножеств n-элементного множества $[n] = \{1, \dots, n\}$ не содержащего слабых k-подсолнухов. И хотя широко распространена гипотеза, что при каждом фиксированном значении k величина $G_k(n)$ растет медленнее любой экспоненты от n, строгое обоснование хоть какой-нибудь нетривиальной верхней оценки представляет из себя весьма непростую задачу. Франклу и Рёдлю удалось доказать[1], что для любого $k \geq 3$ существует $\varepsilon_k > 0$ такое, что $G_k(n) \leq \big(2 - \varepsilon_k + o(1)\big)^n$ при растущем n. Их доказательство не было конструктивным, но можно показать, что наибольшее значение величины ε_k, которое можно надеяться получить в рамках предложенного метода, не превосходит $2^{-2^{k+o(k)}}$, и уже при $k = 3$ величина ε_3 не превзойдет 0.01. Для последнего частного случая, с использованием современной линейно-алгебраической техники, Наслюнду удалось получить[2] существенно более сильную верхнюю оценку $G_3(n) \leq \big(1.837 + o(1)\big)^n$. Однако, его рассуждение не обобщается на случаи $k > 3$.

В работе [1] нам удалось обосновать следующий конструктивный результат.

Теорема 1. *При всех $k \geq 3$ верно, что $G_k(n) \leq \big(2\psi^{-1/k} + o(1)\big)^n$, где $\psi = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = 1.207...$*

Отметим, что при $k = 3$ наш результат гарантирует только, что $G_3(n) \leq \big(1.879 + o(1)\big)^n$, что слабее, чем полученная ранее Наслюндом верхняя оценка. Однако, наш конструктивный результат значительно усиливает наилучшие из известных верхних оценок при всех $k \geq 4$.

1.2 Евклидова теория Рамсея

Дадим необходимые определения. Обозначим n-мерное пространство с заданной на нем ℓ_p-нормой через $\mathbb{R}^n_p$. (Напомним, что при действительном $p \geq 1$, ℓ_p-нормой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ называется величина $\|\mathbf{x}\|_p \coloneqq \big(\sum_i |x_i|^p\big)^{1/p}$, а при $p = \infty$ — величина $\|\mathbf{x}\|_\infty \coloneqq \max_i |x_i|$.) Подмножество $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^n$ называется *ℓ_p-изометричной копией* некоторого другого подмножества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, если существует биекция $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ такая, что $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p$ при всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}$. Наконец, *хроматическим числом* $\chi(\mathbb{R}^n_p, \mathcal{M})$ пространства $\mathbb{R}^n_p$ с запрещенным одноцветным $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ называется минимальное число цветов, необходимых для такой раскраски точек $\mathbb{R}^n$, при которой ни одна ℓ_p-изометричная копия $\mathcal{M}$ не оказалась бы полностью одноцветной.

[1] P. Frankl, V. Rödl, *Forbidden intersections*, Trans. Amer. Math. Soc., **300**:1, 259–286, 1987.

[2] E. Naslund, *Upper Bounds For Families Without Weak Delta-Systems*, preprint arXiv:2203.13370.

Как следует из названия, в рамках *Евклидовой теории Рамсея* рассматривается случай евклидовой нормы $p = 2$. Франклу и Уилсону удалось доказать[3], что в случае, когда $\mathcal{M}$ является парой точек на единичном расстоянии $\bullet\!\!-\!\!\bullet$, величина $\chi(\mathbb{R}_2^n) \coloneqq \chi(\mathbb{R}_2^n, \bullet\!\!-\!\!\bullet)$ растет экспоненциально быстро. На текущий момент 'рекорд' в этом направлении принадлежит Райгородскому, который установил[4] следующее.

Теорема 2. *При больших n верно, что $\chi(\mathbb{R}_2^n) \geq \big(\psi_2 + o(1)\big)^n$, где $\psi_2 = \sup\limits_{0 \leq x \leq 1} \frac{1+x+x^3}{1+x^2+x^4} = 1.239...$*

Франкл и Рёдль обобщили это утверждение, доказав[5], что величина $\chi(\mathbb{R}_2^n, \mathcal{M})$ экспоненциально быстро стремится к бесконечности не только для случая пары точек на единичном расстоянии, но и для любых $k+1$ точек общего положения в $\mathbb{R}^k$, т.е. для случая когда $\mathcal{M}$ является невырожденным симплексом. Наиболее интересен здесь случай правильного k-мерного симплекса $\triangle^k$. В рамках метода, предложенного Франклом и Рёдлем, удается доказать, что при любом фиксированном $k \geq 3$ асимптотически верно, что

$$\chi\big(\mathbb{R}_2^n, \triangle^k\big) \geq \left(1 + \frac{1}{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}} + o(1)\right)^n,$$

а при $k = 2$ — что $\chi\big(\mathbb{R}_2^n, \triangle\big) \geq \Big(1.0140... + o(1)\Big)^n$. Последний результат был немного усилен Наслюндом, которому с помощью линейно алгебраической техники удалось показать[6], что

$$\chi\big(\mathbb{R}_2^n, \triangle\big) \geq \Big(1.0144... + o(1)\Big)^n,$$

В работе [1] нам удалось существенно усилить эти неравенства.

Теорема 3. *При всех $k \in \mathbb{N}$ верно, что*

$$\chi\big(\mathbb{R}^n, \triangle^k\big) \geq \big(\psi_2^{1/(k+1)} + o(1)\big)^n,$$

где величина ψ_2 определена в формулировке теоремы 2. В частности,

$$\chi(\mathbb{R}^n, \triangle) \geq \big(1.0742... + o(1)\big)^n, \;\; \text{и} \;\; \chi(\mathbb{R}^n, \triangledown) \geq \big(1.0551... + o(1)\big)^n.$$

Отметим, что с ростом k, величина $\psi_2^{1/(k+1)} = 1 + \frac{0.214...}{k} + O\big(\frac{1}{k^2}\big)$ стремится к единице практически с 'линейной' скоростью, значительно усиливая упомянутые выше предшествующие результаты, обеспечивавшие лишь экспоненциальную скорость убывания.

1.3 Чебышёвская теория Рамсея

За исключением правильных симплексов, рассмотренных нами в предыдущем разделе, есть много других естественных конфигураций одноцветность которых можно было бы попытаться 'запретить'. В настоящем разделе мы рассмотрим одномерные конфигурации. Для любых положительных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, мы обозначим множество $\{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2, \ldots, \sum_{t=1}^{k} \lambda_t\}$ через $\mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. В частном случае, когда $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 1$, мы для краткости обозначим это множество за $\mathcal{B}_k$.

[3] P. Frankl, R.M. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica, **1**:4, 357–368, 1981.
[4] A.M. Raigorodskii, *On the Chromatic Number of a Space*, Russian Math. Surveys, **55**, 351–352, 2000.
[5] P. Frankl, V. Rödl, *A partition property of simplices in Euclidean space*, J. Amer. Math. Soc., **3**:1, 1–7, 1990.
[6] E. Naslund, *Monochromatic Equilateral Triangles in the Unit Distance Graph*, Bull. Lond. Math. Soc., **52**:4, 687–692, 2020.

В рамках Евклидовой теории Рамсея дальнейшее изучение этих конфигураций не представляет значительного интереса, так как известно[7], что $\chi(\mathbb{R}^n_2, \mathcal{B}_5) = 2$ при всех $n \in \mathbb{N}$. (Как следствие, те же равенства верны и для всех $\mathcal{B}_k$ при $k \geq 5$, так как в этом случае справедливо включение $\mathcal{B}_5 \subset \mathcal{B}_k$.) Ситуация принципиально меняется для случая максимум-метрики, т.е. в рамках *Чебышёвской теории Рамсея*, как показывает следующий результат, доказанный нами в прошлом году в работе [9].

Теорема 4. *Для любых $k, n \in \mathbb{N}$ и любых положительных $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ верно, что*

$$\chi\big(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)\big) \geq \left(\frac{k+1}{k}\right)^n.$$

Данный результат показывает, что в отличие от евклидова случая, ни при каком фиксированном значении k тождество $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = 2$ не может выполняться в максимум-метрике при всех достаточно больших n (а именно, при всех $n > k \ln 2$). В работе [3] мы установили, что данное равенство все же справедливо для 'противоположного режима', когда значение k велико в сравнении с n.

Теорема 5. *При любом $n \in \mathbb{N}$ существует двухцветная раскраска $\mathbb{R}^n$ такая, что ни одна ℓ_∞-изометричная копия $\mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ такого, что $\max_t \lambda_t \leq 1$ и $\sum_{t=1}^k \lambda_t \geq 5^n$, не окажется полностью одноцветной. В частности, при всех $n \in \mathbb{N}$ и $k \geq 5^n$ верно, что $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k) = 2$.*

1.4 Турановские задачи на прямой

Рассмотрим конечное множество $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}$. Произвольное подмножество $A \subset \mathbb{Z}$ назовем *$\mathcal{B}$-свободным*, если ни при каком $t \in \mathbb{Z}$ ни *транслят* $t + \mathcal{B}$, ни его *отражение* $t - \mathcal{B}$ не содержатся в A. Напомним, что *верхняя асимптотическая плотность* $\overline{d}(A)$ множества A определяется равенством $\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A\cap[-n,n]|}{2n+1}$. Обозначим за $d_f(\mathcal{B})$ наибольшую верхнюю асимптотическую плотность $\mathcal{B}$-свободных множеств, т.е. положим

$$d_f(\mathcal{B}) := \sup\big\{\overline{d}(A) : A \subset \mathbb{Z} \text{ является } \mathcal{B}\text{-свободным}\big\}.$$

Очевидно, что для всех двухточечных $\mathcal{B}$ справедливо точное равенство $d_f(\mathcal{B}) = 1/2$. Однако, уже при $|\mathcal{B}| = 3$ ситуация становится намного менее тривиальной. Шмидт и Туллер высказали[8] некоторую гипотезу о значениях величины $d_f(\mathcal{B})$ для этого случая, которую нам удалось полностью доказать в работе [4].

Теорема 6. *Пусть λ_1 и $\lambda_2 \in \mathbb{N}$ взаимно просты. Тогда для $\mathcal{B} = \{0, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2\}$ верно, что*

$$d_f(\mathcal{B}) = \max\left(\frac{\lfloor\frac{2}{3}(\lambda_1 + 2\lambda_2)\rfloor}{\lambda_1 + 2\lambda_2}, \frac{\lfloor\frac{2}{3}(2\lambda_1 + \lambda_2)\rfloor}{2\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

Данный результат представляет не только самостоятельный интерес для элементарной теории чисел, но и имеет непосредственную связь с задачами Чебышёвской теории Рамсея, рассмотренными нами в предыдущем разделе, как показывает следующий результат, доказанный нами в прошлом году в работе [9].

Теорема 7. *При всех $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}$, для $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ при растущем n верно, что*

$$\chi\big(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}\big) = \big(d_f(\mathcal{B}) + o(1)\big)^{-n}.$$

[7] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean Ramsey theorems I*, J. Combin. Theory Ser. A, 14 (1973), N3, 341–363.

[8] W.M. Schmidt, D.M. Tuller, *Covering and packing in $\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{R}^n$, (I)*, Monatsh. Math., **153** (2008), N3, 265–281.

2 Итоги

За три года получения Стипендии я защитил в Московском Физико-Техническом Институте кандидатскую диссертацию (4 марта 2021 года, научный руководитель — Андрей Михайлович Райгородский), проводил семинары по курсу ‘Дискретная математика’ для студентов физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ 6 семестров подряд (преподавательская нагрузка — 120 академических часов за семестр), принял участие в работе 9 конференций (в 2022 году не участвовал, информацию за 2020–2021 годы см. в предшествующих отчетах), а также опубликовал 11 статей и препринтов, 8 из которых пришлись именно на 2022 год:

[1] A. Kupavskii, A. Sagdeev, D. Zakharov, *Cutting corners*, arXiv:2211.17150, submitted to Transactions of the American Mathematical Society.

[2] A. Grebennikov, A. Sagdeev, A. Semchankau, A. Vasilevskii, *On the sequence* $n! \bmod p$, arXiv:2204.01153, submitted to Revista Matemática Iberoamericana.

[3] V. Kirova, A. Sagdeev, *Two-colorings of normed spaces without long monochromatic unit arithmetic progressions*, arXiv:2203.04555, to appear in SIAM Journal on Discrete Mathematics.

[4] N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, *Solution to a conjecture of Schmidt and Tuller on one-dimensional packings and coverings*, arXiv:2203.03873, to appear in Proceedings of the American Mathematical Society.

[5] A. Golovanov, A. Kupavskii, A. Sagdeev, *Odd-distance and right-equidistant sets in the maximum and Manhattan metrics*, European Journal of Combinatorics, **107**, 103603, 8 pp., 2023, DOI:10.1016/j.ejc.2022.103603

[6] В.О. Кирова, А.А. Сагдеев, *Двухцветные раскраски нормированных пространств без длинных одноцветных арифметических прогрессий*, Доклады Российской Академии Наук: Математика, Информатика, Процессы Управления, **506**:1, 54–56, 2022, DOI:10.31857/S2686954322050125

[7] А.И. Голованов, А.Б. Купавский, А.А. Сагдеев, *Множества с нечетными расстояниями и равноудаленные вправо последовательности в чебышёвской и манхеттенской метриках*, Доклады Российской Академии Наук: Математика, Информатика, Процессы Управления, **506**:1, 45–48, 2022, DOI:10.31857/S2686954322050101

[8] А.Б. Купавский, А.А. Сагдеев, Н. Франкл, *Бесконечные множества могут быть рамсеевскими в метрике Чебышёва*, Успехи Математических Наук, **77**:3, 175–176, 2022, DOI:10.4213/rm10055

[9] N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, *Max-norm Ramsey Theory*, arXiv:2111.08949, submitted to Combinatorics, Probability and Computing.

[10] A. Kupavskii, A. Sagdeev, *All finite sets are Ramsey in the maximum norm*, Forum of Mathematics, Sigma, **9**, e55, 12 pp., 2021, DOI:10.1017/fms.2021.50

[11] А.Б. Купавский, А.А. Сагдеев, *Теория Рамсея в пространстве с чебышёвской метрикой*, Успехи Математических Наук, **75**:5, 191–192, 2020, DOI:10.1070/RM9958

Благодарности. Пользуясь случаем, я хотел бы в заключительный в рамках данного проекта раз выразить свою признательность спонсорам и жюри конкурса ‘Молодая Математика России’, а также поблагодарить Андрея Борисовича Купавского, являющегося соавтором большинства публикаций из вышеприведенного списка.