Н. Семенякин. Отчёт за первый год получения стипендии "Молодая математика России".

За второй год аспирантуры (первый год получения стипендии "Молодая математика России") я получил несколько научных результатов:

- В соавторстве с Павлом Гавриленко и Егором Зенкевичем нами была завершена работа [GSZ] про кластерно-алгебраическую природу решения уравнения тетраэдра, найденного Бажановым и Сергеевым [BS]. Это решение является самым универсальным из известных, в разных пределах приводит к другим известным решениям. Мы показали, что оператор Лакса, найденный Бажановым и Сергеевым, естественно возникает как трансфер-матрица путей на элементарном 4х угольном двудольном графе, причём Пуассоновы структуры на переменных, ассоциированных с этими путями, и на матричных элементах решения Бажанова-Сергеева, оказываются согласованными. Само уравнение тетраэдра оказывается равенством между трансфер-матрицей графа полученного "склейкой" 3х таких блоков, и трансфер-матрицей графа, который получается как результат действия 4х spider-move преобразований этого двудольного графа, про которые известно что они сохраняют трансфер-матрицу.

  Во второй части этой работы мы приводим явный рецепт для построения двудольного графа на торе, статистическая сумма путей на котором даёт спектральную кривую интегрируемой системы, с любым наперёд заданным многоугольником Ньютона. Для симметрических многоугольников Ньютона двудольный граф может быть элементарно сконструирован из 4х угольных блоков рассмотренных в первой части, и таким образом обобщает рецепт из [BS], по которому там предлагалось строить спектральную кривую системы с прямоугольным многоугольником Ньютона. Явная конструкция для несимметрических многоугольников Ньютона опирается на соответствие между двудольными графами на торе и циклическими словами в двойной аффинной группе Вейля. Основным объектом здесь являются коммутирующие подгруппы $\widetilde{W}(A^{(1)}_{a_1-1}) \times ... \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{a_n-1}) \subset \widetilde{W}(A^{(1)}_{N-1})$, $a_1 + ... + a_n = N$, которые мы строим по тому же принципу, по которому в [FJMM] строились коммутирующие подалгебры в квантовых аффинных алгебрах. Продуктом этой конструкции также является лемма, классифицирующая циклические слова в двойной аффинной группе Вейля, в терминах многоугольников Ньютона.

  Статья отправлена в "Journal of High Energy Physics", мы ожидаем рецензий. Также я представлял её результаты на аспирантском семинаре в Сколтехе (`часть 1`, `часть 2`), на семинаре Центра Перспективных Исследований Сколтеха (`часть 1`, `часть 2`), и на аспирантском семинаре в университете Нотр Дам.

- В рамках работы по прояснению связи статистических сумм топологической теории струн и димерных статистических сумм, мною была получена явная интегральная формула для препотенциала Зайберга-Виттена 5-мерной $N = 1$ калибровочной теории (или более общё препотенциал для любой плоской алгебраической кривой $P(e^z, e^w) = 0$ в $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$). С точностью до регуляризующих членов, препотенциал даётся формулой

  $$\mathcal{F}_P = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{dz d\bar{z}}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{dw d\bar{w}}{2\pi} \log P(e^z, e^w). \tag{1}$$

  Эта формула происходит из квазиклассического вычисления для димерной статсуммы, как детерминанта оператора Дирака-Кастеляйна, в пределе исчезающей "деавтономизации". Определяя параметр деавтономизации q как меру некоммутативности операторов магнитных трансляций $T_x T_y = q T_y T_x$, лидирующая асимптотика $\det(K(T_x, T_y))$ в пределе $q \to 1$ может быть найдена из стандартного для ВКБ приближения интегрирования по фазовому объёму

  $$\hbar \to 0 : \qquad \det \hat{H} = \prod_i E_i \to \exp\left(\int \left(\frac{dp dq}{2\pi\hbar} \right)^d \log(E(p,q)) \right)$$

  которое фактически и написано в формуле (1). Прямое доказательство элементарными методами того, что формула (1) действительно удовлетворяет уравнениям Зайберга-Виттена, для спектральной кривой замкнутой цепочки Тоды $P(\lambda, \mu) = \lambda + 1/\lambda + \mu + Z/\mu + U$, было представлено мной на аспирантском семинаре в Сколтехе (`часть 1`, `часть 2`). Сейчас я продолжаю работу по аккуратному обоснованию этой формулы и прояснении её связи с другими интегрируемыми структурами.

За прошедший год я посетил две школы:

- Школа-конференция по теории струн, интегрируемым системам и теории представлений, Москва, Россия.

- Школа “Integrable Systems and Representation Theory”, Болонья, Италия.

Также я был членом организационного комитета "2й весенней школы по математике и физике". В весеннем семестре я был учебным ассистентом А. А. Рослого на курсе "Калибровочные теории".

References

[GSZ] P. Gavrylenko, M. Semenyakin, Y. Zenkevich, *Solution of tetrahedron equation from transfer matrix of dimers*, [arXiv:2010.15871].

[BS] V. V. Bazhanov, S. Sergeyev, *Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups*, Journal of Physics A 39 (2006) 13, [arXiv:hep-th/0509181].

[FJMM] B. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, *Branching rules for quantum toroidal* $\mathfrak{gl}(n)$, [arXiv:1309.2147].