Отчёт по гранту ММР

Илья Вильковиский

Декабрь 2020

1 Введение.

Не смотря на долгую историю развития интегрируемые квантовые теории поля (ИКТП) до сих содержат множество открытых вопросов, одними из важнейших являются вопросы классификации (или хотя бы перечисления широкого класса) таких теорий, и обнаружение возможных связей между ними. В этих целях полезно изучить более простые интгерируемые теории которые возникают в Ультрафиолетовом пределе исходных ИКТП. Широкий класс таких упрощенных теорий описывается коммутативными подалгебрами в $\mathcal{W}$-алгебрах. Часто $\mathcal{W}$-алгебры удаётся изучать в терминах более общего объекта - Афинного Янгиана (и связанных структур) $\mathcal{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$, каждое представление Афинного Янгиана связанно с некоторой $\mathcal{W}$-алгеброй.

Секция 2.1 посвящена изучению Афинного Янгиана и W-алгебр типа $\mathcal{A}$, в секции 2.2 я объясню что W-алгебры типа $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ так-же можно изучать в терминах унифицирующей K-алгебры, которая связана с Афиннам Янгианом.

2 Результаты.

2.1 RLL реализация Афинного Янгиана.

Совместно с А.Литвиновым мы довольно подробно изучили вопрос о связи $\mathcal{RLL}$ алгебры и Афинного Янгиана $\mathcal{Y}(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ полученного в [1].

RLL алгебра это квадратичная алгебра с образующими $\mathcal{L}_{\lambda,\mu}$ и соотношениями:

$$\mathcal{R}_{ij}(u-v)\mathcal{L}_i(u)\mathcal{L}_j(v) = \mathcal{L}_j(v)\mathcal{L}_i(u)\mathcal{R}_{ij}(u-v). \tag{1}$$

В нашем случае R-матрица это бесконечно мерный оператор действующий в пространстве двух свободных бозонов, он зависит от двух параметров $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3=-\epsilon_1-\epsilon_2$ и однозначно (с точностью до нормировки) определяется соотношением:

$$R_{1,2}(u_1-u_2)(i\epsilon_3\partial_x-\partial\phi_1(x))(i\epsilon_3\partial_x-\partial\phi_2(x)) = (i\epsilon_3\partial_x-\partial\phi_2(x))(i\epsilon_3\partial_x-\partial\phi_1(x))R_{1,2}(u_1-u_2) \tag{2}$$

А бозоны ϕ нормированны следующим образом:

$$\partial_i\phi(x)\partial_j\phi(y) = -\delta_{i,j}\frac{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}{\epsilon_i}\frac{1}{\sin^2(x-y)} \tag{3}$$

Мы обнаружили что некоторые специальные комбинации токов $\mathcal{RLL}$ алгебры

$$h(u) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\varnothing,\varnothing}(u), \qquad e(u) \overset{\text{def}}{=} h^{-1}(u)\cdot\mathcal{L}_{\varnothing,\square}(u), \quad f(u) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}_{\square,\varnothing}(u)\cdot h^{-1}(u), \tag{4}$$

Удовлетворяют токовым соотношениям Афинного Янгиана полученным Цымбалюком [1]. А именно имеют место квадратичные соотношения:

$$[h(u),\psi(v)] = 0, \quad [\psi(u),\psi(v)] = 0, \quad [h(u),h(v)] = 0, \tag{5}$$

$$(u-v-\epsilon_3)h(u)e(v) = (u-v)e(v)h(u)-\epsilon_3 h(u)e(u), \tag{6}$$

$$(u-v-\epsilon_3)f(v)h(u) = (u-v)h(u)f(v)-\epsilon_3 f(u)h(u), \tag{7}$$

$$[e(u),f(v)] = \frac{\psi(u)-\psi(v)}{u-v}, \tag{8}$$

Соотношения между ee, ff

$$g(u-v)\Big[e(u)e(v) - \frac{e_{\square\square}(v)}{u-v+\epsilon_1} - \frac{e_{\substack{\square\\ \square}}(v)}{u-v+\epsilon_2} - \frac{e_{\boxed{\square}}(v)}{u-v+\epsilon_3}\Big] =$$

$$= \bar{g}(u-v)\Big[e(v)e(u) - \frac{e_{\square\square}(u)}{u-v-\epsilon_1} - \frac{e_{\substack{\square\\ \square}}(u)}{u-v-\epsilon_2} - \frac{e_{\boxed{\square}}(u)}{u-v-\epsilon_3}\Big], \quad (9)$$

$$\bar{g}(u-v)\Big[f(u)f(v) - \frac{f_{\square\square}(v)}{u-v-\epsilon_1} - \frac{f_{\substack{\square\\ \square}}(v)}{u-v-\epsilon_2} - \frac{f_{\boxed{\square}}(v)}{u-v-\epsilon_3}\Big] =$$

$$= g(u-v)\Big[f(v)f(u) - \frac{f_{\square\square}(u)}{u-v+\epsilon_1} - \frac{f_{\substack{\square\\ \square}}(u)}{u-v+\epsilon_2} - \frac{f_{\boxed{\square}}(u)}{u-v+\epsilon_3}\Big], \quad (10)$$

Соотношения между $\psi e, \psi f$

$$\begin{aligned} g(u-v)\psi(u)e(v) &= \bar{g}(u-v)e(v)\psi(u) + \text{locals}, \\ g(u-v)f(v)\psi(u) &= \bar{g}(u-v)\psi(u)f(v) + \text{locals}, \end{aligned} \quad (11)$$

И соотношениям Серра

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3}(u_{\sigma_1} - 2u_{\sigma_2} + u_{\sigma_3})e(u_{\sigma_1})e(u_{\sigma_2})e(u_{\sigma_3}) + \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3}\left[e(u_{\sigma_1}), e_{\boxed{\square}}(u_{\sigma_2}) + e_{\square\square}(u_{\sigma_2}) + e_{\substack{\square\\ \square}}(u_{\sigma_2})\right] = 0, \\ &\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3}(u_{\sigma_1} - 2u_{\sigma_2} + u_{\sigma_3})f(u_{\sigma_1})f(u_{\sigma_2})f(u_{\sigma_3}) + \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_3}\left[f(u_{\sigma_1}), f_{\boxed{\square}}(u_{\sigma_2}) + f_{\square\square}(u_{\sigma_2}) + f_{\substack{\square\\ \square}}(u_{\sigma_2})\right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Где мы ввели функции $g, \bar{g}$:

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x+\epsilon_1)(x+\epsilon_2)(x+\epsilon_3), \quad \bar{g}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x-\epsilon_1)(x-\epsilon_2)(x-\epsilon_3). \quad (13)$$

Можно заметить что члены выделенные синим зависят только от одного аргумента, мы называем такие члены локальными, их конкретная форма весьма громоздка, но легко заметить что если переписать соотношения в модах, локальные члены войдут только в первые несколько соотношений.

Например соотношение (9) может быть переписанно в виде:

$$[e_{i+3}, e_j] - 3[e_{i+2}, e_{j+1}] + 3[e_{i+1}, e_{j+2}] - [e_i, e_{j+3}] + \sigma_2\left([e_{i+1}, e_j] - [e_i, e_{j+1}]\right) = \sigma_3\{e_i, e_j\}, \quad \text{для } i, j > 0 \quad (14)$$

Который не зависит от локальных членов. Здесь σ_i это элементарные симметрические полиномы от переменных ϵ_i.

Мы так же заметили несколько отличий $\mathcal{RLL}$ алгебры и Афинного Янгиана. $\mathcal{RLL}$ алгебра содержит дополнительный картановский ток $h(v)$, что приводит к существованию бесконечномерного центра.

Наконец мы изучили вопрос о диагонализации интегралов движения связанных с $\mathcal{RLL}$ алгеброй, и предложили явные формулы для Бете векторов и Бете уравнений, которые полностью описывают спектр и собственные вектора интегралов движения. Похожие результаты были получены Б.Фейгиным, М.Джимбо, Т.Мивой и Е.Мухиным [2] а также М.Аганаджич и А.Окуньковым [3]. Однако мы использовали более явную конструкцию в духе алгебраического Анзаца Бете.

2.2 K-алгебра, как унификация W-алгебра типа B,C,D.

Часто введение дополнительного параметра проясняет ситуацию, в этой секции мы будем иметь дело с q-деформированными объектами, а именно вместо трёх параметров ϵ_i, введём три параметра $q_i = e^{\hbar\epsilon_i}$, так что не деформированный объект отвечает пределу $\hbar \to 0$.

В то время как Афинный Янгиан унифицирует $\mathcal{W}$-алгебры типа $\mathcal{A}$, возникает вопрос нахождения структуры обслуживающей $\mathcal{W}$-алгебры типов $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. Совместно с Б.Фейгиным, М.Джимбо и Е.Мухиным была введена новая алгебра $\mathcal{K}$, с центральным элементом C, образующими:

$$E(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} E_r z^{-r}, \quad K^{\pm}(z) = \exp\Big(\sum_{\pm r>0} H_r z^{-r}\Big), \quad K(z) = K^-(z)K^+(C^2 z).$$

И соотношениями:

$$K^{\pm}(z)K^{\pm}(w)=K^{\pm}(w)K^{\pm}(z)\,,$$
$$g(z,w)g(z,C^2w)\,K^{+}(z)K^{-}(w)=\bar g(z,w)\bar g(z,C^2w)\,K^{-}(w)K^{+}(z)\,,$$
$$g(z,w)\,K^{\pm}(z)E(w)=\bar g(z,w)E(w)\,K^{\pm}(z)\,,$$
$$g(z,w)E(z)E(w)+g(w,z)E(w)E(z)=\frac{1}{\kappa_1}\Big(g(z,w)\delta\big(C^2\frac{z}{w}\big)K(z)+g(w,z)\delta\big(C^2\frac{w}{z}\big)K(w)\Big)\,.$$

$$\underset{z_1,z_2,z_3}{\mathrm{Sym}}\,\frac{z_2}{z_3}[E(z_1),[E(z_2),E(z_3)]]=\underset{z_1,z_2,z_3}{\mathrm{Sym}}\,\big(1-\frac{z_1^2}{z_2z_3}\big)\frac{z_1(z_1+z_2)(z_1+z_3)}{\bar g(z_1,z_2)\bar g(z_1,z_3)}g(z_2,z_3)\delta\Big(C^2\frac{z_2}{z_3}\Big)E(z_1)K(z_2)\,.$$

В отличие от Квантовой Тороидальной Алгебры $U_q(\widehat{\widehat{\mathfrak{gl}}}_1)$ (q-деформации Афинного Янгиана), алгебра $\mathcal{K}$ не является алгеброй Хопфа, но имеет структуру комодуля над $U_q(\widehat{\widehat{\mathfrak{gl}}}_1)$. А именно:
Отображение $\Delta:\mathcal{K}\to U_q(\widehat{\widehat{\mathfrak{gl}}}_1)\otimes\mathcal{K}$ снабжает $\mathcal{K}$-алгебру структурой левого комодуля над $U_q(\widehat{\widehat{\mathfrak{gl}}}_1)$:

$$\begin{aligned}
&\Delta E(z)=e(C_2^{-1}z)\otimes K^{+}(z)+1\otimes E(z)+\tilde f(C_2z)\otimes K^{-}(z)\,,\\
&\Delta K^{+}(z)=\psi^{+}(C_1^{-1}C_2^{-1}z)\otimes K^{+}(z)\,,\\
&\Delta K^{-}(z)=\psi^{-}(C_2z)^{-1}\otimes K^{-}(z)\,,\\
&\Delta C=C\otimes C\,,
\end{aligned}$$

where $C_1=C\otimes 1$, $C_2=1\otimes C$,
$\tilde f(z)=-\psi^{-}(z)^{-1}f(Cz)$ is antipode of $f(z)$.

Нами были найдены три представления алгебры $\mathcal{K}$ типа CD с центральным зарядом $C^2=q_i^{-1}$, и три представления типа B с центральным зарядом $C^2=q_i^{1/2}$. Умножая эти представления на представления Тороидальной Алгебры - мы получим большое количество представлений, при этом ток $\mathcal{E}$ будет переходить в генерирующий ток $\mathcal{W}$-алгебры, таким способ можно получить генерирующие токи (супер) $\mathcal{W}$-алгебр типов $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ а так же некоторые новые примеры $\mathcal{W}$-алгебр. Например умножая представление типа CD с центральным зарядом $C^2=q_2^{-1}$, на представление Тороидальной Алгебры с центральным зарядом $C^2=q_{1,3}^{l}$ ток $\mathcal{E}$ перейдёт в основной $\mathcal{W}$ ток серии $\mathcal{W}(_l)$, выбирая $C^2=q_2^{l}$ мы получим D серию. Стартуя с представления типа B и центральным зарядом $C^2=q_2^{1/2}$ и умножая его на представление Тороидальной Алгебры с центральным зарядом $C^2=q_{1,3}^{l}$ ток $\mathcal{E}$ перейдёт в основной $\mathcal{W}$ ток B серии $\mathcal{W}(B_l)$. Более общее представление Тороидальной Алгебры параметризуется тремя числами n_1,n_2,n_3 и имеет центральный заряд $C^2=q_1^{n_1}q_2^{n_2}q_3^{n_3}$, умножая его на представления алгебры $\mathcal{K}$ мы получим $\mathcal{W}$-токи $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ серий включая твистованные и суперсимметричные случаи.

Наконец мы показали что алгебра $\mathcal{K}$ содержит три семейства коммутативных подалгебр, что позволяет строить q-деформированные версии интегралов движения в W-алгебрах $\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ серии.

В качестве дальнейшей работы, естественно задать вопрос об одновременной диагонализации построенных интегралов движения, в терминах уравнений и векторов Бете, аналогично тому как это происходит в типе $\mathcal{A}$ [2], [3], [4]. Совместно с А.Литвиновым мы обнаружили что эта идеология и в правду работает, с поправкой на то что для алгебры $\mathcal{K}$ нужно использовать технику Бете Анзаца с границей [5]. Мы сделали гипотезу об уравнениях Бете в этом случае которая подтверждается численными вычислениями. Мы надеемся продолжить работу в этом направлении с целью получения и доказательства аналитических формул для векторов Бете.

3 Опубликованные и поданные в печать работы.

- A.Litvinov, I.Vilkoviskiy *Liouville reflection operator, affine Yangian and Bethe ansatz* , arXiv: 2007.00535. Подана в J-hep.
- B.Feigin, M.Jimbo, E.Mukhin, I.Vilkoviskiy *Deformations of W algebras via quantum toroidal algebras*, arXiv: 2003.04234, на стадии резензирования.

4 Участие в конференциях и школах. Преподовательский опыт.

- *2-ая весенняя студенческая школа по математике и физике.* Я был куратором двух тем, "Анионы"и "Термодинамический Бете анзац" ссылка.

Список литературы

[1] Alexander Tsymbaliuk. The affine yangian of gl1 revisited. *Advances in Mathematics*, 304:583–645, 2017.

[2] B Feigin, M Jimbo, T Miwa, and E Mukhin. Quantum toroidal and bethe ansatz. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 48(24):244001, 2015.

[3] Mina Aganagic and Andrei Okounkov. Quasimap counts and bethe eigenfunctions. *arXiv preprint arXiv:1704.08746*, 2017.

[4] I.Vilkoviskiy A.Litvinov. Liouville reflection operator, affine yangian and bethe ansatz. *arXiv preprint arXiv:2007.00535*.

[5] Evgeni K Sklyanin. Boundary conditions for integrable quantum systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 21(10):2375, 1988.