Отчет по конкурсу "Молодая математика России"

Ахмеджанова Маргарита

Декабрь 2021

1 Результаты, полученные в этом году

1.1 Опровержение гипотезы Ле Барса для всех $p \in (0,1)$

Для неориентированных графов *предложения в монадической логике второго порядка* (предложения MSO) строятся с использованием реляционных символов $\sim$ (интерпретируемых как смежность) и $=$, логических связок $\neg, \to, \leftrightarrow, \vee, \wedge$, переменных первого порядка (FO) $x, y, x_1, \ldots$, которые выражают вершины графа, переменных MSO $X, Y, X_1, \ldots$, которые выражают унарные предикаты, кванторы $\forall, \exists$ и скобок(для формальных определений см. [8]). Если в предложении MSO ϕ все переменные MSO являются экзистенциальными и стоят вначале, то предложение называется *экзистенциально* монадическим второго порядка (EMSO). Например, предложением EMSO

$$\exists X \quad [\exists x_1 \exists x_2\ X(x_1) \wedge \neg X(x_2)] \wedge \neg[\exists y \exists z\ X(y) \wedge \neg X(z) \wedge y \sim z]$$

выражает свойство графа быть несвязным. Обратите внимание, что в этом предложении есть 1 монадическая переменная и 4 переменные FO, но его можно легко переписать, используя только 2 переменные FO. В дальнейшем для предложения ϕ мы будем использовать обычное обозначения из теории моделей $G \models \phi$, если ϕ верно для G.

В [7] Кауфман и Шела опровергли закон MSO 0-1 (*закон 0-1 для логики* $\mathcal{L}$ гласит, что каждое предложение $\varphi \in \mathcal{L}$ либо истинно (асимптотически) почти на всех графах на множестве вершин $[n] := \{1, \ldots, n\}$ при $n \to \infty$, либо ложно почти на всех графах). В терминах случайных графов их результат можно сформулировать следующим образом: существует предложение MSO φ такое, что $\mathsf{P}(G(n, 1/2) \models \varphi)$ не сходится при $n \to \infty$ (обратите внимание, что нарушение *закона сходимости* даже сильнее, чем сбой закона 0-1). Напомним, что для $p \in (0,1)$ биномиальный случайный граф $G(n,p)$ представляет собой граф на $[n]$ с каждой парой вершин, соединенных ребром с вероятностью p и независимо от других пар. Для получения дополнительной информации мы отсылаем читателей к книге [1]. Однако известно, что $G(n, 1/2)$ подчиняется закону первого порядка (FO) 0-1 [5]. В 2001 году Le Bars [2] опроверг закон сходимости EMSO для $G(n, 1/2)$ и предположил, что для предложений EMSO с 2 переменными FO (или, короче говоря, предложений EMSO (FO^2)), $G(n, 1/2)$ подчиняется закону ноль-один. В 2019 году Попова и второй автор [9] опровергли эту гипотезу. Обратите внимание, что все вышеприведенные результаты, кроме последнего, можно легко обобщить на произвольную постоянную граничную вероятность p. В [9] замечено, что гипотеза Ле Барса терпит неудачу для плотного набора $p \in (0,1)$.

1.1.1 Постановка задачи и наш результат

В свое работе мы опровергаем гипотезу Ле Барса для всех $p \in (0,1)$. Мы даже доказываем гораздо больше: существует предложение EMSO(FO^2) φ такое, что для каждого $p \in (0,1)$, $\mathsf{P}(G(n,p) \models \varphi)$ не сходится. Обратите внимание, что это *одно предложение* опровергает закон 0-1 для всех p. Давайте определим это предложение.

Пусть $X(k,\ell,m)$ количество наборов $(X_1,x_1,X_2,x_2,X_3,x_3)$, состоящих из 3 множеств $X_1,X_2,X_3 \subset [n]$, трех вершин $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$ таких что,

- $|X_1| = k, |X_2| = \ell, |X_3| = m$ и $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$,
- каждое X_i доминирует $[n] \backslash (X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3)$, т.е. каждая вершина из $[n] \backslash (X_1 \sqcup X_2 \sqcup X_3)$ имеет хотя бы одного соседа в каждом X_i,
- для любых двух различных $i,j \in \{1,2,3\}$,есть ровно одно ребро между X_i и X_j —а именно, ребро между x_i и x_j.

Теорема 1. *Для любого $p \in (0,1)$, $\mathsf{P}(\exists k,\ell,m\ X(k,\ell,m) > 0)$ не сходится при $n \to \infty$.*

1.2 Раскраски би-однородных гиперграфов

n-однородным гиперграфом называется гиперграф, в котором все ребра имеют размер равный n, т.е. в каждом ребре ровно n вершин. Би-однородным гиперграфом $H = (V,E_1,E_2)$ называют гиперграф, в котором все ребра из E_1 имеют один размер ребра, а все ребра из E_2 – другой. Ребро e гиперграфа H называется одноцветным, если все его вершины окрашены в один цвет. Правильной раскраской назовем раскраску множества вершин при которой каждое ребро не является одноцветным. Хроматическим числом гиперграфа, $\chi(H)$, называется минимальное число цветов требуемое для правильное раскраски.

Математического ожидание и хроматическое число. Одним из классических примером задачи теории раскрасок гиперграфов является задача Эрдеша–Хайнала о нахождении величины $m(n)$, равной минимально возможному количеству ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше двух [15]. На сегодняшний день лучшими оценками величины $m(n)$ являются оценка Радхакришнана-Сринивасана [32] $c_1\sqrt{\frac{n}{\log n}}2^n < m(n)$ и оценка Эрдеша [14] $m(n) < \frac{\mathrm{e}\log 2}{4}n^2 2^n$.

Эрдеш и Ловас [21] заметили, что поиск величины $m(n)$ связан с нахождением минимума функции $f(H) = \sum_{e\in E} 2^{-n+1}$ по всем гиперграфам H, у которых $\chi(H) > 2$.

В случае правильных двухцветных раскрасок неоднородных гиперграфов изучается функция $f(H) = \sum_{e\in E} 2^{-|e|+1}$. Так, впервые Беку [11] удалось доказать, что *если минимальный размер неоднородного гиперграфа $H = (V,E_k,E_{k+1},\dots,E_s)$ хотя бы k и*

$$f(H) = \frac{|E_k|}{2^k} + \frac{|E_{k+1}|}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{|E_s|}{2^s} < \Theta\left(\log^* k\right),$$

то H можно правильно раскрасить в два цвета. В формулировке Бека [11] $\log^* k$ обозначает обратную функцию по отношению к функции $2 \uparrow\uparrow k$ (башня из k двоек). В 2008 Лу аннонсировал доказательство оценки $\frac{\log k}{\log\log k}$, но к сожалению, в нем нашли ошибку. В 2018 году Дюрай, Гутовский и Козик [12] доказали оценку $C\log k$ и на сегодняшний день она самая наилучшая из известных для общего случая. В частной случае для простых неоднородных гиперграфов известна оценка $\sqrt{k}$, доказанная Шабановым [20].

Другим интересным направлением является получение верхних оценок для функции $f(H)$. Из результата Эрдеша [14] следует, что существует k-однородный гиперграф с $\chi(H) > 2$, у которого математическое ожидание количества одноцветных ребер равно Ck^2. Данную оценку пытались улучшить много лет, но пока никому не удалось. Некоторые исследователи выдвигали гопотезу, что данную оценку можно улучшить, если рассматривать неоднородные гиперграфы. Однако, на сегодняшний день пока таких результатов не известно. Дюрай, Козик и Шабанов [13] недавно показали, что случайный однородный гиперграф с числом ребер $|E| < (1-\epsilon)\frac{e\ln(2)}{4}k^2 2^k$ почти наверное является 2-раскрашиваемым, т.е. имеет хроматическое число равное двум. Среди явных конструкций гиперграфов, которые нельзя правильно ракрасить в два цвета известны оценка Гебауэр [23] $2^{k+\Theta\left(k^{2/3}\right)}$ и впоследствии немного улучшенная на основе оценки Гебауэр оценка Гутовского, Дюрая и Козика [12] $2^{k+\Theta\left((k\log(k))^{1/2}\right)}$.

1.2.1 Постановка задачи и наш результат

Поскольку над задачей оценивания фунции $f(H)$ работало много известных математиков, но нижних оценок лучше логарифма, а верхний оценок лучше квадратичной функции получено не было, мы решили рассмотреть очень естественное обобщение правильной раскраски на случай би-однородных гиперграфов.

По аналогии с задачами из теории Рамсея, раскраску вершин би-однородного гиперграфа $H = (V, E_1, E_2)$ мы решили называть рамсеевской, если нет красных ребер из E_1 и одновременно нет синих ребер из E_2. Для данного типа раскрасок нами получен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $H = (V, E_k, E_n)$ -би-однородный гиперграф, с размерами ребер k и n, соответственно. Пусть выполнено следующее соотношение:*

$$\frac{|E_k|}{2^k} + \frac{|E_n|}{2^n\sqrt{n}/\log^3 n} < 0.2 \cdot \frac{\log n}{\log\log n}.$$

Если $2 \le k < \frac{n}{\log^2 n}$, то для H существует рамсеевская раскраска.

Следствие 1. *Пусть $H = (V, E_k, E_n)$ — би-однородный гиперграф, с размерами ребер k и n, соответственно, и пусть существует $p \in (\frac{100\log\log n}{k}, 1 - \frac{100\log n}{n})$, для которого:*

$$\frac{|E_k|}{p^k} + \frac{|E_n|}{(1-p)^n\sqrt{n}/\log^2 n} < \log n.$$

Если $2 \le k < \frac{n}{\log^2 n}$, то для H существует рамсеевская раскраска.

1.3 Непрерывный подход к онлайн раскраскам гиперграфов

В течение последних двух десятилетий алгоритмическоой стороне классических задач о раскрасках уделено особое внимание. Это, в частности, связано с прикладными задачами , в которых данные как правило поступают последовательно, по частям, но ответ требуется давать незамедлительно. Другая мотивация связана со случаем, когда данные слишком велики, чтобы их можно было хранить в памяти. Для моделирования подобных задач была введена онлайн формулировка классических задач о раскрасках, получившая название онлайн-раскраска. Например, свойство 2-раскрашиваемости, также известное как "свойство B", было сформулировано Асламом и Дагатом [28] в онлайн формулировке.

1.3.1 Классические задачи о раскрасках гиперграфов

Позвольте нам вкратце описать несколько классических задач о раскрасках. Мы будем использовать термин 'k-граф"для обозначения k-однородного гиперграфа, но в общем случаем под гиперграфом мы всегда будем понимать неоднородный гиперграф.

- **Свойство B:** гиперграф $H = (V, E)$ обладает свойством B (2-раскрашиваемый), если существует раскраска V в 2 цвета, так что ни одно ребро $f \in E$ не является одноцветным. Эрдеш и Хайнал [?] (1961) поставили задачу о поиске величины $m(k)$, равной минимально возможному числу ребер в k-графе без свойства B. Эрдеш [14] (1963-1964) доказал $\Omega\left(2^k\right) \leq m(k) = O\left(2^k k^2\right)$, Радхакришнан со Сринивасаном [32] (2000) доказали $m(k) \geq \Omega\left(2^k (k/\ln k)^{1/2}\right)$. Мы также процитируем Бека [11](1978) и Дурая, Гутовски с Козиком [12] (2018), как математиков, которые добились значительного прогресса в 2-раскрашиваемости неоднородных гиперграфов.

- **Правильная раскраска:** $H = (V, E)$ является r-окрашиваемой, если существует раскраска V в r цветов, так что ни одно ребро $f \in E$ не является одноцветным. Общий неоднородный случай малоизвестен, большинство результатов посвящено однородному случаю, см. работы [33], [29]. Для однородного случая, введено $m(k, r)$ - наименьшее число ребер в k-графе с хроматическим числом больше, чем r. Оценка $m(k, r) = O(k^2 r^k \ln r)$ следует из оценки Эрдеша для 2 цветов, а оценка $m(k, r) \geq \Omega\left(r^{k-1} (k/\ln k)^{r-1/r}\right)$ доказана Черкашиным с Козиком [25] (2014). Также обратитим внимание, что при $r > k$ верна более сильная оценка, которая была доказана Акользиным с Шабановым [26] (2016).

- **Полноцветная раскраска:** r-раскраска вершин гипергафа H является полноцветной, если в каждом ребре есть вершины каждого цвета. Косточка [31] (2002) определил число $p(k, r)$ как минимальное возможное число ребер в k-графе, которое не допускает полноцветной r-раскраски и обнаружил интересную взаимосвязь между $p(k, r)$ и некоторыми другими классическими характеристиками. Черкашин [22] (2018) доказал $p(k, r) = O(k^2 \ln r \left(\frac{r}{r-1}\right)^k / r)$. Первый автор и Балог недавно доказали,что для всех $r^3 < k/100 \ln k$ справедливо, что $p(k, r) \geq \Omega((k/\ln k)^{\frac{r-1}{r}} \left(\frac{r}{r-1}\right)^k / r^2)$.

1.3.2 Онлайн версии классических задач о раскрасках

Для краткости мы здесь приведем только онлайн версию свойства B.
Онлайн свойство B: дан гиперграф $H = (V, E)$. Painter не знает гиперграф H, но он зна-

ет мульти-множество мощностей его ребер, т.е. множество $\mathcal{A}(H) = \{|e| : e \in E(H)\}$. Пусть множество вершин V пронумеровано с помощью $\mathbb{N}$. В раунде i Painter получает информацию о подмножестве ребер, которые содержат вершину v_i. Painter должен немедленно назначить черный или белый цвет представленной вершине v_i. Painter выигрывает, когда все вершины окрашены и ни одно ребро не является одноцветным. Обозначим эту игру как $(\mathcal{A}, 2)_{ol}$ игра. Для каких мультимножеств ребер мощности $\mathcal{A}$ у Paintera есть выигрышная стратегия в игре $(\mathcal{A}, 2)_{ol}$?

Онлайн свойство В было введено Асламом и Дагатом [28] (1993). Они рассмотривали однородный случай ($\mathcal{A} = \{k, \dots, k\}$). Пусть $m_{ol}(k)$-максимальное число N, такое что у Paintera есть выигрышная стратегия для всех k-графов с $E(H) < N$. Аслам и Дагат [28] (1993) доказали, что $2^{k-1} \le m_{ol}(k, 2) \le k \cdot \phi^{2k} = O(k(2,62)^k)$. Дурай, Гутовски и Козик [30] (2015) представили новую интересную стратегию для Paintera и улучшили оценку так, что она с точнойстью до алгоритмической константы стала совпадать с нижней оценкой: $m_{ol}(k, 2) \le 16 \cdot 2^k$.

2 Эффективный подход к онлайн раскрасках: Chip игра

Оказывается, что онлайн-раскраска гиперграфа может быть решена путем применения метода, основанного на технике игры в фишки, впервые предложенной Спенсером [34] и Асламом и Дхагатом [28]. Сначала мы опишем Chip игру в очень общем виде.

Общая Chip игра $(S, \tau_{i\in\mathcal{F}}, dead)$ задается конечным множеством S, элементы которого называются путями, элементом $dead \in S$, называемым *мертвым* путем, и набор отображений $\tau_{i\in\mathcal{F}}\colon S \to S$, удовлетворяющих $\tau_i(dead) = dead$ (мертвые остаются мертвыми). Ячейки игрового поля пронумерованы $(\mathbb{N} \cup \{0\}) \times S$, ячейки $(0,\ m) : m \ne dead$ называются *выигрышными ячейками*. Некоторые ячейки содержат фишки, в ячейке может быть более одной фишки. В каждом раунде Pusher назначает каждой фишке, бегущая она или стоящая в данном раунде. Затем Remover, который видит ход Pushera, выбирает одно из отображений τ_i. После этого каждая стоящая фишка сохраняет свою ячейку, а каждая бегущая фишка меняет свою ячейку в соответствии с правилом $(n,\ m) \to (n-1,\ \tau_i(m))$. Затем начинается новый раунд. Pusher выигрывает, если он кладет фишку в выигрышную ячейку.

- **Онлайн свойство В:** В терминах $(S, \tau_{i\in\mathcal{F}}, dead)$ игры,

$$S = \{0, 1, 2, dead\}, \quad \tau_1 : \{0, 1, 2\} \to \{1, 1, dead\}, \quad \tau_2 : \{0, 1, 2\} \to \{2, dead, 2\}.$$

- **Онлайн правильные раскраски:** В терминах $(S, \tau_{i\in\mathcal{F}}, dead)$ игры,

$$S = \{0, 1, \dots, r, dead\}, \quad \tau_i\colon \{0, 1, \dots, i, \dots, r\} \to \{i, dead, \dots, i, \dots, dead\},$$

  т.е. τ_i отображает 0 и i в i, а $S \setminus \{0, i\}$ в $dead$.

- **Онлайн полноцветные раскраски:** В терминах $(S, \tau_{i\in\mathcal{F}}, dead)$ игры,

$$S = \{0, 1\}^r, \quad \tau_i : j \to j \vee (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

где $(0,\dots,0,1,0\dots,0)$ имеет 1 на i-ой позиции, $(1,\dots,1)$ мертвый путь, $\vee$ логическое или.

2.1 Непрерывный подход к онлайн раскраскам гиперграфов

Дискретные процессы иногда можно анализировать, помещая их в непрерывную структуру. Здесь мы рассмотрим обобщение игры *General Chip* $(S,\tau_{i\in\mathcal{F}})$, где вместо фишек у нас неотрицательные действительные числа, называемые золотым песком. (Мы можем рассматривать эти цифры как количество золотого песка, оставшегося после разбивания фишек в игре на фишки). Теперь формально.

Общая игра золотой песок $(S,\tau_{i\in\mathcal{F}},dead)$ задается конечным множеством S, элементы которого называются путями, элементом $dead\in S$, называемым *мертвым* путем, и набором отображений $\tau_{i\in\mathcal{F}}\colon S\to S$, удовлетворяющих $\tau_i(dead)=dead$ (мертвые остаются мертвыми). Ячейки игрового поля пронумерованы $(\mathbb{N}\cup\{0\})\times S$, ячейки $(0,\ m):m\neq dead$ называются *выигрышными ячейками*. Все ячейки содержат действительные неотрицательные числа, называемые *золотой песок*. Существует только конечное количество ненулевых чисел. В каждом раунде Pusher делит золотой песок в каждой ячейке на бегущую и стоящую части. Затем Remover, который видит ход Pushera, выбирает одно из отображений τ_i. После этого каждая стоящая часть сохраняет свою ячейку, а каждая бегущая часть меняет свою ячейку в соответствии с правилом $(n,\ m)\to(n-1,\ \tau_i(m))$. Затем начинается новый раунд.

Задача: Пусть $X=(x_{i,path\ j})_{i,j}$ матрица начального распределения золотого песка (кратко, распределение X). Пусть $\mathcal{X}$ - множество всех матриц начального распределения золотого песка. Можно ли найти максимальное значение выигрыша Пушера для любой заданной матрицы $X\in\mathcal{X}$?

2.2 Наш результат

Рассмотрим функцию $g:\mathcal{X}\times[0,1]^r\mapsto R_+$, заданную следующим образом:

- **Непрерывное онлайн свойство B:**

$$g(X,p)=\sum_{j=1}^{N}\left(p^jx_{j,path\ 1}+(1-p)^jx_{j,path\ 2}+\left(p^j+(1-p)^j\right)x_{j,path\ 0}\right)$$

  Тогда супремум выйгрыша Пушера равен минимуму функции $g(X,p)$ на $0\le p\le 1$.

- **Непрерывные онлайн правильные раскраски:**

$$g(X,p_1,\dots p_r)=\sum_{j=1}^{N}\left(p_1^jx_{j,path\ 1}+p_2^jx_{j,path\ 2}+\dots+p_r^jx_{j,path\ r}\right)+\\ \left(\sum_{i=1}^{N}p_i\right)x_{1,path\ 0}+\left(\sum_{i=1}^{N}p_i^2\right)x_{2,path\ 0}+\dots+\left(\sum_{i=1}^{N}p_i^N\right)x_{N,path\ 0}.$$

Тогда супремум выйгрыша Пушера равен минимуму функции $g(X, p_1, \dots p_r)$ на

$$p_1 + \dots + p_r = 1, \qquad p_j \geq 0, j \in [1, r].$$

- **Непрерывные онлайн полноцветные раскраски:**

$$g(X, p_1, \dots p_r) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i \in S} f_j(i) x_{j,path\ i},$$

где $f_j(i)$ определена следующим образом: пусть $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ двоичная запись пути i с ровно $s, s \in [1, r]$ единицами,т.е. для некоторых $\{j_1, j_2, \dots, j_s\} \subset [1, r]$ мы имеем $a_{j_1} = \dots = a_{j_s} = 1$. Тогда

$$f_j(i) = \sum_{J \subset [1,r] \setminus \{j_1, \dots j_s\} \& \& |J| \leq r-s-1} (A + B(J))^j \, (-1)^{(r-s-1)-|J|}$$

с $A = p_{j_1} + \dots + p_{j_s}$ and $B(J) = \sum_{v \in J} p_v$. См. пример [1].

Тогда супремум выйгрыша Пушера равен минимуму функции $g(X, p_1, \dots, p_r)$ на

$$p_1 + \dots + p_r = 1, \qquad p_j \geq 0, j \in [1, r].$$

- **Непрерывные онлайн предписанные раскраски $\mathbf{K_{m,m}}$:**

$$g(X, p) = p x_{1,path\ 1} + p^2 x_{2,path\ 1} + \dots + p^N x_{N,path\ 1} + \\ (1-p) x_{1,path\ 2} + (1-p)^2 x_{2,path\ 2} + \dots + (1-p)^N x_{N,path\ 2}.$$

Тогда супремум выйгрыша Пушера равен минимуму функции $g(X, p)$ на $0 \leq p \leq 1$.

3 Опубликованные и поданный в печать работы за 2021 год

- М.Б. Ахмеджанова, *Раскраски би-однородных гиперграфов*, Труды МФТИ, Том 13 (2021), № 3 (51).*DOI* : 10.53815/20726759_2021_13_3_23
- M. Akhmejanova, M. Zhukovskii, *EMSO(FO^2) 0-1 law fails for all dense random graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, (на рецензировании). https://arxiv.org/abs/2106.13968

[1]In case $r = 4$ we have $f_j(1111) = 0, f_j(1110) = (p_1+p_2+p_3)^j, f_j(1100) = (p_1+p_2+p_3)^j + (p_1+p_2+p_4)^j - (p_1+p_2)^j, f_j(1000) = (p_1+p_2+p_3)^j + (p_1+p_2+p_4)^j + (p_1+p_3+p_4)^j - (p_1+p_2)^j - (p_1+p_3)^j - (p_1+p_4)^j + p_1^j$. And similarly, for other paths.

4 Участие в конференциях и школах

- 03.10.21-11.10.21 "Воркшоп по Открытым Проблемам в Комбинаторике и Геометрии II"

- Международная конференция "The 23rd Thailand-Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games 3-5 сентября, 2021, Чиангмай, Тайланд

- Международная конференция "Конференция международных математических центров мирового уровня 9-13 августа, 2021, Сочи, Россия.

5 Педагогическая деятельность

нет

Список литературы

[1] N. Alon, J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons, 2000.

[2] J.-M. Le Bars, *The 0-1 law fails for monadic existential second-order logic on undirected graphs*, Information Processing Letters **77** (2001) 43–48.

[3] B. Bollobás, *Random Graphs*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2001.

[4] R. Fagin, *Probabilities in finite models*, J. Symbolic Logic **41** (1976): 50–58.

[5] Y.V. Glebskii, D.I. Kogan, M.I. Liogon'kii, V.A. Talanov, *Range and degree of realizability of formulas the restricted predicate calculus*, Cybernetics **5** (1969) 142–154 (Russian original: Kibernetica **2**, 17–27).

[6] S. Janson, T. Luczak, A. Rucinski, *Random Graphs*, New York, Wiley, 2000.

[7] M. Kaufmann, S. Shelah, *On random models of finite power and monadic logic*, Discrete Math. **54** (1985) 285–293.

[8] L. Libkin, *Elements of finite model theory*, Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

[9] S.N. Popova, M.E. Zhukovskii, *Existential monadic second order logic of undirected graphs: The Le Bars conjecture is false*, Annals of Pure and Applied Logic **170**:4 (2019) 505–514.

[10] J.H. Spencer, *The Strange Logic of Random Graphs*, Springer Verlag, 2001.

[11] *J. Beck.* On three-chromatic hypergraphs, // Discrete Math. 29, 1978, 127–137.

[12] *L. Duraj, G. Gutowski, J. Kozik.* A note on two-colorability of nonuniform hypergraphs // ICALP, 46, 2018, 1–13.

[13] *L. Duraj, J. Kozik, D. Shabanov.* Random hypergraphs and property B. // Eur. J. Comb. 91, 2021, 103205.

[14] *P. Erdős.* On a combinatorial problem. II, // Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 15: 3–4, 1964, 445–447.

[15] *P. Erdős, A.Hajnal.* On a property of families of sets // Acta Math. Acad.Sci. Hungar., 12: 1–2, 1961, 87–123.

[16] *P. Erdős, L. Lovász.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 10, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[17] *H. Gebauer.* On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges. // Journal of Combinatorial Theory. Series A, 120:7, 2013, 1483–1490.

[18] *J. Kozik.* Improving Gebauer's Construction of 3-Chromatic Hypergraphs with Few Edges // Proceedings of the 48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2021.

[19] *J. Radhakrishnan, A. Srinivasan,* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // Random Structures and Algorithms, 16:1, 2000, 4–32.

[20] *D. Shabanov* Around Erdős-Lovasz problem on colorings of non-uniform hypergraphs // Discrete Math., 338:11, 1976–1981, 2015.

[21] P. Erdős, L. Lovász, "Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions", *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1975, 609–627.

[22] D. Cherkashin, "A note on panchromatic colorings", *Discrete Mathematics*, 341(3), 2018, 652–657.

[23] H. Gebauer, "On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges", *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **120**:7, 2013, 1483–1490.

[24] A. Pluhár, "Greedy colorings for uniform hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **35**:2, 2009, 216–221.

[25] D. Cherkashin, J. Kozik, "A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs", *Random Structures and Algorithms*, **47**:3, 2015, 407–413.

[26] Akolzin I., D. Shabanov, Colorings of hypergraphs with large number of colors, Discrete Mathematics. – 2016. –Vol. 339, No 12. – P. 3020–3031.

[27] Kozik J., Multipass greedy coloring of simple uniform hypergraphs. Random Structures and Algorithms. – 2016. – Vol. 48, No 1. – P. 125–146.

[28] J. Aslam, A. Dhagat, "On-Line Algorithms for 2-Coloring Hypergraphs Via Chip Games.", *Theor. Comput. Sci.*, **112**:2, 1993, 355–369.

[29] Raigorodskii A.M., Cherkashin D., "Extremal problems in hypergraph colourings", *Russian Mathematical Surveys*, 2020, **75**:1, 89–146.

[30] L. Duraj, G. Gutowski, J. Kozik, "Chip games and paintability", *Electronic journal of combinatorics*, **23**:3, 2016, Article number P3.3.

[31] A. Kostochka, "On a theorem of Erdős, Rubin, and Taylor on choosability of complete bipartite graphs", *Electron. J. Combin.*, **9**:1, 2002, 1–4.

[32] J. Radhakrishnan, A. Srinivasan, "Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring", *Random Structures and Algorithms*, **16**:1, 2000, 4–32.

[33] Raigorodskii A.M., Shabanov D.A., "The Erdős – Hajnal problem of hypergraph colouring, its generalizations and related problems", *Russian Mathematical Surveys*, 2011, **66**:5, 933–1002.

[34] J. Spencer. "Ten Lectures on the Probabilistic Method", page 59. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.