Отчет по конкурсу “Молодая математика России”

Ахмеджанова Маргарита

Декабрь 2022

1 Опубликованные и поданные в печать работы за 2022 год

- M. Akhmejanova, M. Zhukovskii, *EMSO(FO^2) 0-1 law fails for all dense random graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2022, https://doi.org/10.1137/21M1429655
- M Akhmejanova, DA Shabanov, *Equitable colorings of hypergraphs with r colors*, Journal of Mathematical Sciences, 2022, DOI 10.1007/s10958-022-05823-x
- M Akhmejanova, K Olmezov, A Volostnov, I Vorobyev, *Wiener index and graphs, almost half of whose vertices satisfy Šoltés property* , Discrete Applied Mathematics, 2023, https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.09.021
- M. Akhmejanova, I. Bogdanov, G. Chelnokov, *The continualization approach to the online hypergraph coloring*, https://arxiv.org/abs/2211.09486

2 Участие в конференциях и школах

- Jan 10-12, Ramanujan College, University of Delhi, Delhi, India, International Conference on Graphs, Networks and Combinatorics (ICGNC 2023)
- Seminar of Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures https://combgeo.org

3 Результаты, полученные в 2022 году [1]

3.1 Линейное число Турана

Гиперграф — это обобщение графа, в котором каждым ребром могут соединяться не только две вершины, но и любые подмножества множества вершин. Гиперграф H называется 3-однородным, если каждое его ребро содержит ровно 3 вершины. Гиперграф H называется линейным (простым), если каждая пара вершин в H содержится не более чем в одном ребре.

[1] Автор не стал включать в отчет проекты, которые продолжают направления, уже описанные в отчете 2021 года, а также проекты, в которых на текущий момент вклад автора меньше вклада соавторов

Линейное число Турана $ex_L(n, F)$ линейного 3-однородного гиперграфа F определяется в [1] как максимальное число ребер в линейном 3-однородном гиперграфе на n вершинах без копий (подграфов, изоморфных) F. По сути, задача является обобщение классической задачи Турана [2] о максимальном числе рёбер в графе на n вершинах, не содержащем заданного графа в качестве подграфа, на случай гиперграфов. Так, известная теорема Эрдеша-Стоуна-Симоновича [2]утверждает, что число ребер в графе на n вершинах, не содежащего подграфа H, не может быть больше, чем

$$\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}\right)\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right)+o\left(n^2\right),$$

где $\chi(H)$—это зроматическое число графа H. Понятие линейное число Турана было введено Гьярфашом, в своем исследовании он поставил вопрос, чему равно линейное число Турана, когда F - это линейный цикл, линейный путь или линейное дерево заданной длины.

Частным случаем линейного дерева является линейный путь. Гиперграф P_k называется линейным 3-однородном путем, если $V\left(P_k\right)=\left\{v_0, v_1, \ldots, v_{2k}\right\}$ и $P_k=\bigcup_{l=0}^{k-1}\left\{\left\{v_{2l}, v_{2l+1}, v_{2l+2}\right\}\right\}$. В рамках этого определения в линейном пути могут пересекаться только соседние ребра, чего не наблюдается, например, в Берж путях. Гьярфаш вместе с группой соавторов среди прочего доказали, что

- $ex_L(n, T_k) \leq (2k-3)n$;
- $\frac{n(k-1)}{3} \leq ex_L(n, T_k)$ если n делится на $2k-1$ и $2k \equiv 2, 4 \pmod 6$;
- $ex_L(n, P_k) \leq \frac{3kn}{2}$.

Мы вместе с Кожевниковым и Гьярфашем изучали и продолжаем изучать данную задачу. На данный момент мы умеем доказывать, что

Теорема 1. *Для всех $k, n > 4$,*

$$ex_L(n, P_k) \leq \frac{4}{3}kn.$$

Также мы умеем обобщать имеющиеся результаты для 3-однородных гиперграфов на гиперграфы большей однородности. Совсем недавно (30 ноября 2022 года) на архиве появилась статья [3] венгерских математиков в которой они получают точный результат на линейное число Турана, в случае когда F- это Берж путь. Конечной целью нашиз исследования вляется получение точной оценки в случае линейных путей.

3.2 Бутстрап перколяция для двудольных графов

Принято считать, что задача о $wsat(G, F)$ берет свое начало из такого направления клеточных автоматов как Бутстрап перколяция графов. $wsat(G, F)$ определяется как наименьшее количество ребер в остовном подграфе G, не содержащем копий F, таком, что все ребра G можно восстановить одно за другим так, что при добавлении каждого следующего ребра добавляется хотя бы одна копия F. Например,

$$wsat(K_n, K_3) = n-1.$$

В последнем нетрудно убедиться, так как взяв в качестве F граф $K_{1,n-1}$ мы можем восстановить все ребра полного графа. С другой стороны, если ребер в F будет меньше, чем $n-1$, то F (будучи графом на n вершинах) окажется несвязным, и начиная с несвязного графа мы не сможем получить полный граф.
Гораздо сложнее доказать гипотезу Боллобаша о том, что

$$wsat\,(K_n, K_s) = (s-2)n - \binom{s-1}{2}.$$

Данная гипотеза была доказана в работе Ловаса [4] с использованием матроидов.
Задача wsat рассматривается и для случайных графов в модели $G(n,p)$. Среди последних работ в данной области мы можем отметить результаты Жуковского, Судакова, Коранди, Бидголи и других, см обзор литературы [5],[6]. Например, Жуковский в своей работе вместе с соавторами доказывает существование и находит приблизительное значение пороговой вероятности события, когда $wsat(G(n,p), K_s) = wsat(K_n, K_s)$.

Рассмотрим двудольные графы. Асимптотика для полного двудольного графа изучалась в работах [8]-[11]. Однако в данных работах остался не изученным случай, когда n близко к числу вершин полного двудольного графа $K_{s,t}$, т.е. n почти равно $s+t$.
В своем проекте мы вместе с Воробьевым, Кучуковой и Жуковским показываем, что

Теорема 2. $wsat(K_{2s+1}, K_{s,s}) = \binom{2s+1}{2} - (4s-4)$.

Теорема 3.

$$wsat(K_{s+t+1}, K_{s,t}) \in \{h(s,t), h(s,t)+1\},$$

где $h = \binom{s+t+1}{2} - (2s+2t-2)$.

В наших дальнейших планах записать доказательство для
$wsat(K_{s+t+j}, K_{s,t})$ при $j < s+t$, а также рассмотреть случай случайного графа в модели $G(n,p)$.

4 Педагогическая деятельность

Педагогической деятельности нет. Могу добавит только, что за 2022 год мною было отрецензировано две статьи в журнале "Discrete Mathematics"и начато, но еще не закончено рецензирование одной статьи из "The Electronic Journal of Combinatorics."

Список литературы

[1] A. Gyárfás, M. Ruszinkó, G. Sárközy, *Linear Turán numbers of acyclic triple systems*, European Journal of Combinatorics, Volume 99, 2022, https://doi.org/10.1016/j.ejc.2021.103435

[2] Erdős P., Simonovits M, *A limit theorem in graph theory*, Studia Sci. Math. Hungar., 1 (1966), pp. 51-57

[3] E. Győri, Ervin and N. Salia *Linear three-uniform hypergraphs with no Berge path of given length*, Arxiv preprint, https://arxiv.org/abs/2211.16184

[4] L. Lovász,*Flats in matroids and geometric graphs*, Combinatorial Surveys (Proceedings of the 6th British Combinatorial Conference) (Academic, New York, 1977), pp. 45-86.

[5] Korándi D., Sudakov B. *Saturation in random graphs*, Random structures and algorithms. 2017. V. 51. № 1. P. 169-181.

[6] Mohammadian A., Tayfeh-Rezaie B. *Star saturation number of random graphs*, Discrete Math. 2018. V. 341. P. 1166-1170.

[7] N. Alon, J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons, 2000.

[8] Cui Y., Pu L., *Weak saturation numbers of* $K_{2,t}$ *and* $K_p \cup K_q$, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics. 2019. V. 16. № 3. P. 237–240.

[9] Gun W., Korándi D., Sudakov B. $K_{s,t}$*-saturated bipartite graphs*, European J. of Combinatorics. 2015. V. 45. P. 12-20.

[10] Moshkovitz G., Shapira A. *Exact bounds for some hypergraph saturation problems*, J. combinatorial theory B. 2015. V. 111. P. 242-248.

[11] Kronenberg G., Martins T., Morrison $N.$, *Weak saturation numbers of complete bipartite graphs in the clique*, arxiv2004.01289, 2020.