Отчет по конкурсу
«Молодая математика России»
за 2021 год
А.Р. Хакимова

1 Результаты

В отчетном году продолжены ранее начатые исследования обобщенных инвариантных многообразий (ОИМ) нелинейных интегрируемых уравнений. В наших недавних работах [1]–[4] было замечено, что ОИМ представляет собой эффективный инструмент построения пар Лакса и операторов рекурсии. Подход, развитый в [1]–[4], объясняет сущность феномена пары Лакса. Фактически, пара Лакса естественным образом (внутренне) выводится из рассматриваемого нелинейного уравнения. Сначала мы находим линеаризацию (производную Фреше) нелинейного уравнения. Линеаризованное уравнение, очевидно, включает в себя и динамические переменные исходного уравнения, которые уже рассматриваются как функциональные параметры. Далее строим обыкновенное дифференциальное уравнение, также зависящее от динамических переменных исходного уравнения, совместное с линеаризованным уравнением. Это обыкновенное дифференциальное уравнение мы называем обобщенным инвариантным многообразием. Отметим, что для заданного уравнения существует множество таких многообразий. Для нахождения обобщенных инвариантных многообразий используется совместность с линеаризованным уравнением, которая позволяет вывести систему дифференциальных (разностных) уравнений, являющуюся сильно переопределенной из-за наличия независимых параметров – динамических переменных исходного нелинейного уравнения. Во всех рассмотренных нами примерах (КдФ, уравнение Каупа-Купершмидта, уравнение Кричевера-Новикова, цепочки типа Вольтерры из списка Ямилова, два уравнения типа КдФ, найденные Свинолуповым и Соколовым, неавтономная цепочка Гарифуллина-Михайлова-Ямилова, уравнение синус-Гордона и несколько уравнений гиперболического типа и т. д.), соответствующие переопределенные системы эффективно решаются и находятся требуемые нетривиальные многообразия. Тривиальные обобщенные инвариантные многообразия строятся достаточно элементарно с использованием классических симметрий. Многообразие, которое совместно с линеаризованным уравнением тогда и только тогда, когда выполняется исходное нелинейное уравнение, называется нетривиальным. По сути, это требование означает, что пара, состоящая из линеаризованного уравнения и обобщенного инвариантного многообразия, определяет пару Лакса. Следует отметить, что обычные пары Лакса не принадлежат к этому классу, но они могут быть получены из правильно подобранного нелинейного обобщенного инвариантного многообразия с помощью подходящих преобразований. Замечательный факт состоит в том, что из найденного ОИМ можно также вывести и рекурсионный оператор, описывающий иерархию высших симметрий уравнения.

Отметим, что построенные нами нелинейные пары Лакса интересны сами по себе. В работе [5] мы показали, что такую пару можно эффективно использовать для построения частных решений интегрируемых уравнений, путем выведения из них уравнений

Дубровина. Следует отметить, что уравнения Дубровина являются важным элементом метода конечнозонного интегрирования. В [5] были построены уравнения типа Дубровина для цепочки Вольтерры. Однако полученные уравнения имели второй порядок, а не первый, как должно быть в уравнениях Дубровина (см. [6], [7]).

В рамках проекта рассматривался новый способ вывода уравнений Дубровина без использования стандартной пары Лакса для нелинейных уравнений типа КдФ и НУШ, а также нелинейных цепочек типа Вольтерры.

1.1 Обобщенные инвариантные многообразия НУШ и мКдФ

В работе [Habibullin I.T., Khakimova A.R., Smirnov A.O., Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications, Ufa Mathematical Journal, 13:2, pp. 135-151 (2021)] обсуждаются приложения обобщенных инвариантных многообразий нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ). Для рассматриваемых уравнений, отталкиваясь только от уравнений и их линеаризаций (без привлечения какой-либо дополнительной информации), прямым счетом были построены нелинейные обобщенные инвариантные многообразия. Далее, на примере этих уравнений было проиллюстрировано, что обобщенные инвариантные многообразия представляют собой достаточно простой и удобный инструмент для построения пар Лакса, операторов рекурсии и для вывода уравнений Дубровина, определяющих алгебро-геометрические решения нелинейных уравнений. В качестве примеров рассмотрены однофазные и двухфазные решения уравнения НУШ.

1.2 Обобщенное инвариантное многообразие релятивистской цепочки Тоды

В работе [Habibullin I.T., Khakimova A.R., Smirnov A.O., Construction of exact solutions to the Ruijsenaars-Toda lattice via generalized invariant manifolds] обсуждается задача описания частных решений нелинейных интегрируемых цепочек, при помощи обобщенных инвариантных многообразий. В качестве основного объекта рассматривается релятивистская цепочка Тоды (или цепочка Руйсенарса-Тоды).

В работе построено нелинейное обобщенное инвариантное многообразие второго порядка, которое содержит зависимость от двух произвольных постоянных. Отметим, что линеаризованное уравнение и обобщенное инвариантное многообразие порождают систему обыкновенных дифференциальных уравнений и систему обыкновенных дискретных уравнений. Доказано, что эти две системы совместны тогда и только тогда, когда выполняется цепочка Руйсенарса-Тоды. Следовательно, они определяют пару Лакса рассматриваемой цепочки. Далее мы строим формальное асимптотическое разложение по параметру λ решений этих систем. Предположение, что формальный асимптотический ряд обрывается, порождает дополнительные обыкновенные дифференциальные уравнения для искомого решения рассматриваемой нелинейной цепочки, т.е. они определяют обычные инвариантные многообразия. Полученные уравнения довольно сложные, хотя в простых случаях их можно решить. Ситуация несколько упрощается, когда мы изначально предполагаем, что решения линеаризованного уравнения и обобщенного инвариантного многообразия релятивистской цепочки Тоды являются полиномами по λ, параметризованными своими корнями. В этом случае мы получаем дифференциальные и дискретные уравнения на корни многочленов, которые являются аналогами уравнений Дубровина. Насколько нам известно, аналоги уравнений Дубровина, описывающие динамику по пространственной переменной $n \in Z$, ранее не были получены. Мы показали, что дискретные уравнения Дубровина задают преобразования Беклунда для непрерывных уравнений Дубровина. В работах [8], [9] авторы исследовали цепочку Руйсенарса-Тоды другими методами. Пользуясь полученными уравнениями Дубровина, мы построили простое регулярное решение в виде кинка, периодическое решение с периодом 2, выраженное через эллиптические функции Якоби, и решение, выраженное через $\wp$-функцию Вейерштрасса.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. Habibullin I.T., Khakimova A.R., Smirnov A.O., Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications, Ufa Mathematical Journal, 13:2, pp. 135-151 (2021).

2. Habibullin I.T., Khakimova A.R., Smirnov A.O., Construction of exact solutions to the Ruijsenaars-Toda lattice via generalized invariant manifolds, arXiv:2110.14887 (подана в печать).

3 Участие в конференциях и школах

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов - 2021», 12 – 23 апреля 2021, г. Москва.

2. Международная конференция «Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ 2021», 30 июня – 9 июля 2021 г., Московская область, г. Долгопрудный.

3. Международная конференция «Уфимская осенняя математическая школа - 2021», 6 октября – 9 октября 2021, г. Уфа.

4. XII Международная школа-конференция «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», 6 октября – 9 октября 2021, г. Уфа.

Список литературы

[1] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, M.N. Poptsova, On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations, J. Phys. A: Math. Theor. 49:3, 35 pp. (2016).

[2] И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек, ТМФ, 191:3, 369–388 (2017).

[3] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, On the recursion operators for integrable equations, J. Phys. A: Math. Theor. 51:42, 22 pp. (2018).

[4] И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей, ТМФ, 196:2, 294–312 (2018).

[5] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Invariant manifolds and separation of the variables for integrable chains, J. Phys. A: Math. Theor. 53:39, 25 pp. (2020).

[6] Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков, Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН, 31:1(187), 55–136 (1976).

[7] И.М. Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 23, ВИНИТИ, М., 79–136 (1983).

[8] P. Zhao, E. Fan, Yu. Hou, Algebro-geometric solutions for the Ruijsenaars–Toda hierarchy, Chaos, Solitons and Fractals. 54, 8–25 (2013).

[9] D. Gong, X. Geng, Quasi-periodic solutions of the relativistic Toda hierarchy, Journal of nonlinear mathematical physics. 19:4, 1250030, 35 pp. (2012).