Отчет по конкурсу
«Молодая математика России»
за 2022 год
А.Р. Хакимова

1 Результаты

1.1 Трехмерные нелинейные уравнения, допускающие интегрируемые по Дарбу редукции

В теории нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа особое место занимают уравнения интегрируемые в смысле Дарбу, т.е. уравнения допускающие полные наборы интегралов по обоим характеристическим направлениям. Первые примеры таких уравнений возникли несколько веков назад, они характеризуются тем, что допускают явные формулы для общих решений. Изучение этого класса уравнений основано на таких важных понятиях как характеристические интегралы и характеристические алгебры. В начале 80-х годов прошлого века в работах А.Б. Шабата, Р.И. Ямилова, А.Н. Лезнова и В.Г. Смирнова характеристические алгебры были предложены в качестве инструмента классификации интегрируемых по Дарбу гиперболических систем дифференциальных уравнений экспоненциального типа с двумя независимыми переменными (см. [1], [2]). Позже, в работах И.Т. Хабибуллина и др., было показано, что характеристические алгебры могут быть применены также для классификации интегрируемых нелинейных моделей с тремя независимыми переменными, хотя бы одна из которых является дискретной (см., например, [3], [4]). Идея этого подхода основана на гипотезе, что подходящим образом обрывая уравнение по выбранному дискретному аргументу можно свести его к системе гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными, являющейся интегрируемой по Дарбу. В работах [3], [5] показано, что все известные нелинейные интегрируемые трехмерные уравнения с одной дискретной и двумя непрерывными переменными, а также с одной непрерывной и двумя дискретными переменными допускают интегрируемые по Дарбу редукции, что служит подтверждением упомянутой выше гипотезы. В работах [4], [6], [7] подтверждена эффективность алгоритма классификации трехмерных уравнений с одной дискретной и двумя непрерывными переменными при помощи интегрируемых по Дарбу двумерных редукций. В 2022 году были исследованы интегрируемые нелинейные уравнения типа Хироты-Мивы с тремя независимыми дискретными переменными, а также проведена частичная классификация трехмерных уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными переменными.

1.1.1 Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе

В работе [И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе, ТМФ, 213:2 (2022), 320-346] показано, что идея метода интегрируемой классификации трехмерных цепочек при помощи интегрируемых по Дарбу двумерных редукций, является универсальной и она применима также и к цепочкам типа Хироты-Мивы, где все три независимые переменные являются дискретными. Для исследования уравнений из этого класса в упомянутой работе разработана теория интегрируемых в смысле Дарбу систем полностью дискретных уравнений с двумя переменными, а именно введено понятие характеристической алгебры дискретной системы, уточнено понятие полного набора характеристических интегралов и понятие интегрируемости по Дарбу. А также доказано, что система является интегрируемой по Дарбу тогда и только тогда, когда ее характеристические алгебры по обоим направлениям имеют конечную размерность. В этой же работе проверено, что такие хорошо известные интегрируемые цепочки как уравнение Хироты-Мивы, Y-система и решеточное уравнение КП допускают интегрируемые по Дарбу редукции. Для них найдены иерархии редукций в виде конечно-полевых систем дискретных уравнений. Доказано, что представители этих иерархий малых размерностей $N = 1, 2, 3$ являются интегрируемыми в смысле Дарбу. Для этих систем дано описание характеристических алгебр Ли-Райнхарта, предъявлены полные наборы характеристических интегралов. Фактически, исходя из исследованных примеров, можно с уверенностью считать, что наличие интегрируемых по Дарбу редукций является критерием интегрируемости трехмерных цепочек. Этот критерий можно использовать для идентификации интегрируемости конкретной цепочки, а также при составлении списков интегрируемых цепочек, приняв в качестве классификационного признака наличие интегрируемых по Дарбу редукций.

1.1.2 Алгебраические редукции дискретных уравнений типа Хироты-Мивы

В работе [И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Алгебраические редукции дискретных уравнений типа Хироты-Мивы, Уфимск. матем. журнал, 14:4 (2022), 117–130] продолжено тестирование гипотезы о том, что наличие иерархии интегрируемых в смысле Дарбу двумерных редукций присуще всем интегрируемым дискретным уравнениям типа Хироты-Мивы. А именно проверено, что решеточное уравнение Тоды и ее модифицированный аналог также допускают упомянутые выше редукции. В работе исследованы алгебраические свойства этих цепочек и показано, что при определенном выборе граничных условий они сводятся к системам дискретных уравнений гиперболического типа, допускающим полные наборы характеристических интегралов. Подробно изучены системы дискретных уравнений порядков $N = 2$ и $N = 3$. Для них описаны характеристические алгебры по каждому из направлений n и m, предъявлены полные наборы интегралов.

1.1.3 К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными

Работа [М.Н. Кузнецова, И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными, ТМФ (на стадии рецензирования)] посвящена частичной классификации интегрируемых нелинейных цепочек с тремя независимыми переменными одна из которых непрерывна, а две дискретные. Схема алгоритма классификации, использованная в работе, была предложена в [5]. На данном этапе классификации нами был рассмотрен класс нелинейных цепочек с линейной зависимостью от производных. Как показывают примеры, для интегрируемых цепочек этого типа структура характеристической алгебры по направлению x определяется некоторым характеристическим многочленом степени два или три. Решена задача частичной классификации цепочек указанного выше типа в случае, когда степень полинома равна двум и корни его различны. Доказано, что в этом классе есть только одна интегрируемая цепочка. На уровне конкретного примера проиллюстрировано, как использовать такие редукции для построения локализованных частных решений исходной трехмерной цепочки. По результатам исследования написана статья, направлена в журнал Теоретическая и математическая физика.

1.2 Построение точных решений цепочки Руйзенарса-Тоды через обобщенные инвариантные многообразия

В работе [I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov, Construction of exact solutions to the Ruijsenaars-Toda lattice via generalized invariant manifolds, Nonlinearity, 36:1 (2023), arXiv:2110.14887] предложен новый метод построения частных решений нелинейных интегрируемых уравнений, основанный на понятии обобщенного инвариантного многообразия (ОИМ). ОИМ является обобщением понятия инвариантного многообразия или дифференциальной связи. Метод дифференциальных связей хорошо известен как метод построения частных решений нелинейных уравнений в частных производных [8]. Его суть заключается в том, чтобы добавить к заданному нелинейному уравнению в частных производных другое, гораздо более простое, как правило, обыкновенное, дифференциальное уравнение, совместное с заданным. Тогда любое решение ОДУ будет частным решением уравнения в частных производных. Однако главная проблема заключается в том, чтобы найти такое ОДУ. Наше обобщение состоит в том, что мы ищем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое совместно не с самим нелинейным уравнением в частных производных, а с его линеаризацией, что заметно упрощает задачу. Такое обыкновенное дифференциальное уравнение мы называем обобщенным инвариантным многообразием. В наших работах мы показали, что такие ОИМ эффективно находятся и являются хорошим инструментом построения пар Лакса и операторов рекурсии нелинейных интегрируемых уравнений (см., например, [9], [10], [11]). Кроме того, ОИМ позволяют находить частные решения нелинейных интегрируемых уравнений. Идея подхода заключается в том, чтобы вывести уравнения типа Дубровина непосредственно из ОИМ и линеаризованного уравнения ([12], [13], [14]). Метод обобщенных инвариантных многообразий является эффективным также при изучении нелинейных цепочек, что показано в упомянутой выше работе. Он позволяет вывести уравнения типа Дубровина не только по временной переменной t, но и по пространственной дискретной переменной n. В работе мы иллюстрируем эффективность метода, используя в качестве примера известную модель Руйзенарса-Тоды, для которой найдены новые решения: вещественное и ограниченное частное решение в виде кинка, периодическое решение, выраженное через эллиптические функции Якоби, и решение, выраженное через $\wp$-функцию Вейерштрасса.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе, ТМФ, 213:2 (2022), 320–346.

2. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Алгебраические редукции дискретных уравнений типа Хироты-Мивы, Уфимск. матем. журнал, 14:4 (2022), 117–130.

3. М.Н. Кузнецова, И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными, ТМФ (на стадии рецензирования).

4. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov, Construction of exact solutions to the Ruijsenaars-Toda lattice via generalized invariant manifolds, Nonlinearity, 36:1, 2023 (to appear). arXiv:2110.14887

3 Участие в конференциях и школах

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов - 2022», 11 – 22 апреля 2022, г. Москва.

2. Satellite NDI-2022, International Conference on Nonlinear Dynamics and Integrability & Scientific School «Nonlinear Days», June 27 – July 1, 2022, Yaroslavl, Russia.

3. Международная конференция «Интегрируемые системы и их приложения», 12 – 16 сентября 2022, г. Сочи.

Список литературы

[1] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана, Препринт БФАН СССР, Уфа. – 1981. – 23 с.

[2] А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат, Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем, ТМФ, 51:1 (1982), 10–21.

[3] I. Habibullin, Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for $(2+1)$–dimensional lattices, Physica Scripta, 87:6 (2013), 065005.

[4] I. Habibullin, M. Poptsova, Classification of a Subclass of Two-Dimensional Lattices via Characteristic Lie Rings, SIGMA, 13 (2017), 73, 26 pp.

[5] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D, J. Phys. A: Math. Theor., 54:29 (2021), 295202.

[6] M.N. Kuznetsova, Classification of a subclass of quasilinear two-dimensional lattices by means of characteristic algebras, Уфимск. матем. журн., 11:3 (2019), 110–132.

[7] I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, A.U. Sakieva, Integrability conditions for two-dimensional Toda-like equations, J. Phys. A: Math. Theor., 53:39 (2020), 25 pp.

[8] А.Ф. Сидоров, В.П. Шапеев, Н.Н. Яненко, Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике, Новосибирск: Наука (1984).

[9] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, M.N. Poptsova, On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations, J. Phys. A: Math. Theor. 49:3 (2016), 35 pp.

[10] И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек, ТМФ, 191:3 (2017), 369–388.

[11] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, On the recursion operators for integrable equations, J. Phys. A: Math. Theor. 51:42, 22 pp. (2018).

[12] Б.А. Дубровин, В.Б. Матвеев, С.П. Новиков, Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН, 31:1(187) (1976), 55–136.

[13] И.М. Кричевер, Нелинейные уравнения и эллиптические кривые, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., 23, ВИНИТИ, М., 79–136 (1983).

[14] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov, Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications, Ufa Math. J., 13:2 (2021), 141–157.