Отчет по конкурсу
«Молодая математика России»
за 2023 год
А.Р. Хакимова

1 Результаты

1.1 О классификации нелинейных интегрируемых трехмерных цепочек при помощи характеристических алгебр Ли

Известно, что интегрируемые уравнения обладают рядом замечательных свойств: они допускают широкие классы явных и асимптотических решений, обладают гамильтоновой структурой, а также часто встречаются в приложениях в различных областях физики, механики, квантовой теории поля и др. Поэтому задача классификации интегрируемых систем является одной из важнейших проблем теории интегрируемости. Отметим, что класс трехмерных нелинейных цепочек к настоящему времени остается мало исследованным с точки зрения интегрируемой классификации. Симметрийный подход (см. [1]–[6]), зарекомендовавший себя, как один из эффективных методов интегрируемой классификации в размерности 1+1, в случае многомерных уравнений менее эффективен. Проблема в том, что высшие симметрии уравнений в размерности 1+2 содержат нелокальные переменные, которые создают принципиальные трудности. В связи с этим возникает необходимость создания альтернативных подходов.

В работах И.Т. Хабибуллина и др. был предложен новый подход к классификации интегрируемых нелинейных уравнений с тремя независимыми переменными, хотя бы одна из которых является дискретной (см., например, [7], [8]). Идея этого метода основана на следующей гипотезе: трехмерные интегрируемые нелинейные уравнения (цепочки) допускают редукции, получаемые наложением подходящих условий обрыва, являющиеся системами уравнений гиперболического типа уже с двумя независимыми переменными, допускающими полные наборы характеристических интегралов по каждому из характеристических направлений. Напомним, что гиперболические системы допускающие полные наборы характеристических интегралов по обоим направлениям называются интегрируемыми по Дарбу. В работах [7], [9]–[11], показано, что известные интегрируемые уравнения с тремя независимыми переменными, хотя бы одна из которых является дискретной, допускают интегрируемые по Дарбу редукции, что служит подтверждением упомянутой выше гипотезы. Эффективность алгоритма классификации трехмерных уравнений с одной дискретной и двумя непрерывными переменными при помощи интегрируемых по Дарбу двумерных редукций подтверждена в работах [8], [12], [13]. Следует отметить, что эффективный алгебраический критерий интегрируемости по Дарбу систем дифференциальных уравнений гиперболического типа, основанный на понятии характеристической алгебры Ли, был предложен А.Б. Шабатом в 1980 году. В качестве инструмента классификации интегрируемых по Дарбу гиперболических систем дифференциальных уравнений экспоненциального типа с двумя независимыми переменными характеристические алгебры были использованы в работах А.Б. Шабата, Р.И. Ямилова, А.Н. Лезнова и В.Г. Смирнова (см. [14], [15]).

В работе [М. Н. Кузнецова, И. Т. Хабибуллин, А. Р. Хакимова, К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными, ТМФ, 215:2 (2023), 242–268] мы адаптировали алгебраический метод классификации на случай трехмерных уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными независимыми переменными. В указанной работе были определены понятия характеристического интеграла, полного набора характеристических интегралов, характеристической алгебры, сформулирован и доказан алгебраический критерий интегрируемости цепочки вида

$$u^j_{n+1,x} = u^j_{n,x} + f(u^{j+1}_n, u^j_n, u^j_{n+1}, u^{j-1}_{n+1}), \tag{1}$$

утверждающий, что необходимым и достаточным условием интегрируемости по Дарбу является конечномерность характеристических алгебр по обоим характеристическим направлениям. Также были проанализированы условия интегрируемости, вытекающие из конечномерности характеристической алгебры L_x по направлению x. Было показано, что структура характеристической алгебры определяется некоторым полиномом $P(\lambda)$ таким, что $P(0) = 0$. При этом удобно рассматривать четыре разных случая:

1) $P(\lambda)$ – многочлен второй степени с простыми корнями;
2) $P(\lambda)$ – многочлен второй степени с кратным нулевым корнем;
3) $P(\lambda)$ – многочлен третьей степени;
4) $P(\lambda)$ – многочлен степени четыре и выше.

Первые два случая на основе анализа условий интегрируемости редуцированной системы уравнений, вытекающих из конечномерности алгебры L_x были подробно исследованы в наших работах [М. Н. Кузнецова, И. Т. Хабибуллин, А. Р. Хакимова, К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными, ТМФ, 215:2 (2023), 242–268], [И. Т. Хабибуллин, А. Р. Хакимова, О классификации нелинейных интегрируемых трехмерных цепочек при помощи характеристических алгебр Ли, ТМФ, 217:1 (2023), 142–178], где искомая правая часть цепочки (1) была приведена к конкретному виду, содержащему лишь наборы констант подлежащие определению. Случаи 3) и 4) остаются неисследованными. При этом имеются примеры, относящиеся к случаю 3), в то время как примеры интегрируемых цепочек типа 4) не известны.

1.1.1 Преобразования типа Миуры для интегрируемых цепочек в трехмерном пространстве

В работе [I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.U. Sakieva, Miura-type transformations for integrable lattices in 3D, Mathematics, 11:16 (2023), 3522, 15 pp.] изучается класс интегрируемых полудискретных уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными независимыми переменными. Предлагается эффективный метод поиска преобразований типа Миуры связывающих различные уравнения рассматриваемого типа, основанный на некотором соотношении, обобщающем понятие локального закона сохранения. Эффективность метода иллюстрируется с помощью известных интегрируемых уравнений. Для одного мало изученного уравнения вычислен континуальный предел. Для этого уравнения также обсуждается задача конечнополевых редукций в виде интегрируемых по Дарбу систем уравнений гиперболического типа. Для редукций малых порядков $N = 1$ и $N = 2$ представлены полные наборы характеристических интегралов. Заметим, что существование характеристических интегралов позволяет строить частные решения исходной цепочки. Для случая $N = 1$ в данной работе было найдено явное решение. Найдено новое полудискретное уравнение, выходящее за пределы рассматриваемого класса. Для этого уравнения представлена пара Лакса.

1.1.2 Преобразование Лапласа и интегрируемые уравнения в частных производных типа синус-Гордона

Хорошо известно, что каскадный метод Лапласа является эффективным инструментом для построения решений линейных уравнений гиперболического типа, а также нелинейных уравнений типа Лиувилля (см. [16]–[23]). Однако, связь между методом Лапласа и солитонными уравнения гиперболического типа остается мало изученной. В статье [K.I. Faizulina, I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Laplace transformations and sine-Gordon type integrable PDE, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 57:1 (2023), 015203, 21 pp.] показано, что каскад Лапласа также имеет важные приложения в теории гиперболических уравнений солитонного типа. Установлено, что метод Лапласа обеспечивает простой и эффективный способ построения таких фундаментальных объектов теории интегрируемости как оператор рекурсии, операторы, задающие пару Лакса. В качестве применения этого подхода найдены ранее неизвестные операторы рекурсии и пары Лакса для двух нелинейных интегрируемых уравнений типа синус-Гордона, найденные в работе [24].

2 Опубликованные работы

1. М.Н. Кузнецова, И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными, ТМФ, 215:2 (2023), 242–268. DOI: 10.4213/tmf10403;
2. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, О классификации нелинейных интегрируемых трехмерных цепочек при помощи характеристических алгебр Ли, ТМФ, 217:1 (2023), 142–178. DOI: 10.4213/tmf10513
3. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.U. Sakieva, Miura-type transformations for integrable lattices in 3D, Mathematics, 11:16 (2023), 3522, 15 pp. DOI: 10.3390/math11163522
4. K.I. Faizulina, I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Laplace transformations and sine-Gordon type integrable PDE, J. Phys. A: Math. Theor, 57:1 (2023), 015203, 21 pp. DOI: 10.1088/1751-8121/ad0c72

3 Участие в конференциях и школах

1. 28-я Всероссийская конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, 10 – 14 июля 2023, г. Красноярск.
2. Международная конференция «Интегрируемые системы и их приложения», 11 – 15 сентября 2023, г. Сочи.
3. Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа – 2023», 4 – 8 октября 2023, г. Уфа.

4 Педагогическая деятельность

Участвую в образовательной деятельности в Подготовительном отделении для иностранных граждан ИНО Уфимского университета науки и технологий. Веду курс по дисциплине «Математика» для иностранных студентов.

Список литературы

[1] Н.Х. Ибрагимов, А.Б. Шабат, Уравнение Кортевега–де Фриза с групповой точки зрения, Докл. АН СССР, 244:1 (1979), 57–61.

[2] А.В. Жибер, А.Б. Шабат, Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой, Докл. АН СССР, 247:5 (1979), 1103–1107.

[3] С.И. Свинолупов, В.В. Соколов, Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения, Функц. анализ и его прил., 16:4 (1982), 86–87.

[4] А.В. Михайлов, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем, УМН, 42(256):4 (1987), 3–53.

[5] В.Э. Адлер, А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Симметрийный подход к проблеме интегрируемости, ТМФ, 125:3 (2000), 355–424.

[6] В.В. Соколов, Алгебраические структуры в теории интегрируемых систем, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2019.

[7] I. Habibullin, Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for $(2+1)$–dimensional lattices, Physica Scripta, 87:6 (2013), 065005.

[8] I. Habibullin, M. Poptsova, Classification of a Subclass of Two-Dimensional Lattices via Characteristic Lie Rings, SIGMA, 13 (2017), 73, 26 pp.

[9] I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Characteristic Lie Algebras of Integrable Differential-Difference Equations in 3D, J. Phys. A: Math. Theor., 54:29 (2021), 295202.

[10] И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе, ТМФ, 213:2 (2022), 320–346.

[11] И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Алгебраические редукции дискретных уравнений типа Хироты-Мивы, Уфимск. матем. журнал, 14:4 (2022), 117–130.

[12] M.N. Kuznetsova, Classification of a subclass of quasilinear two-dimensional lattices by means of characteristic algebras, Уфимск. матем. журн., 11:3 (2019), 110–132.

[13] I.T. Habibullin, M.N. Kuznetsova, A.U. Sakieva, Integrability conditions for two-dimensional Toda-like equations, J. Phys. A: Math. Theor., 53:39 (2020), 25 pp.

[14] А.Б. Шабат, Р.И. Ямилов, Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана, Препринт БФАН СССР, Уфа. – 1981. – 23 с.

[15] А.Н. Лезнов, В.Г. Смирнов, А.Б. Шабат, Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем, ТМФ, 51:1 (1982), 10–21.

[16] P.S. Laplace, Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles (Mémoires de l'académie royale de Sciences de Paris), 1776.

[17] J. Liouville, Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2 \log \lambda}{du dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$, J. Math. Pures Appl. 18 (1853), 71–72.

[18] I.M. Anderson, N. Kamran, The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane, Duke Math. J. 87 (1997), 265–319.

[19] E.V. Ferapontov, Laplace transformations of hydrodynamic type systems in Riemann invariants: periodic sequences, J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997), 6861–6878.

[20] С.П. Новиков, И.А. Дынников, Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях, УМН, 52:5(317) (1997), 175–234.

[21] В.Э. Адлер, С.Я. Старцев, О дискретных аналогах уравнения Лиувилля, ТМФ, 121:2 (1999), 271–284.

[22] А.В. Жибер, В.В. Соколов, Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа, УМН, 56:1(337) (2001), 63–106.

[23] Е.И. Ганжа, С.П. Царев, Интегрирование классических серий экспоненциальных систем типа I: Учеб. пособие, Красноярск: КГПУ – 2001. – 56 с.

[24] А.Г. Мешков, В.В. Соколов, Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка, ТМФ, 166:1 (2011), 51–67.

Итоговый отчет по конкурсу «Молодая математика России» А.Р. Хакимова

В течение всего срока (2021-2023 гг.) участия в проекте «Молодая математика России» было опубликовано 8 статей:

1. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov, Generalized invariant manifolds for integrable equations and their applications, Ufa Math. J., 13:2 (2021), pp. 135-151. DOI: 10.13108/2021-13-2-135

2. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Интегралы и характеристические алгебры систем дискретных уравнений на прямоугольном графе, ТМФ, 213:2 (2022), 320–346. DOI: 10.1134/S004057792211006X

3. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, Алгебраические редукции дискретных уравнений типа Хироты-Мивы, Уфимск. матем. журнал, 14:4 (2022), 117–130. DOI: 10.13108/2022-14-4-113

4. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.O. Smirnov, Construction of exact solutions to the Ruijsenaars-Toda lattice via generalized invariant manifolds, Nonlinearity, 36:1, 2023, 231–254. DOI: 10.1088/1361-6544/aca3f5

5. М.Н. Кузнецова, И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, К задаче о классификации интегрируемых цепочек с тремя независимыми переменными, ТМФ, 215:2 (2023), 242–268. DOI: 10.4213/tmf10403

6. И.Т. Хабибуллин, А.Р. Хакимова, О классификации нелинейных интегрируемых трехмерных цепочек при помощи характеристических алгебр Ли, ТМФ, 217:1 (2023), 142–178. DOI: 10.4213/tmf10513

7. I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, A.U. Sakieva, Miura-type transformations for integrable lattices in 3D, Mathematics, 11:16 (2023), 3522, 15 pp. DOI: 10.3390/math11163522

8. K.I. Faizulina, I.T. Habibullin, A.R. Khakimova, Laplace transformations and sine-Gordon type integrable PDE, J. Phys. A: Math. Theor., 57:1 (2023), 015203, 21 pp. DOI: 10.1088/1751-8121/ad0c72

Были получены следующие результаты:

1) В рамках проекта планировалось развитие метода обобщенных инвариантных многообразий (ОИМ) нелинейных интегрируемых уравнений, как инструмент построения пар Лакса, операторов рекурсии, а также частных решений рассматриваемых уравнений. Исследованию этих вопросов посвящены работы [1] и [4]. В указанных работах обсуждаются возможные приложения ОИМ. В качестве основных объектов рассмотрены нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза (мКдФ) и релятивистская цепочка Тоды (или цепочка Руйсенарса-Тоды). Для этих уравнений, отталкиваясь только от уравнений и их линеаризаций (без привлечения какой-либо дополнительной информации), прямым счетом были построены нелинейные обобщенные инвариантные многообразия. На примерах уравнений

НУШ и мКдФ было проиллюстрировано, что обобщенные инвариантные многообразия представляют собой достаточно простой и удобный инструмент для построения пар Лакса, операторов рекурсии и для вывода уравнений Дубровина, определяющих алгебро-геометрические решения нелинейных уравнений. В качестве примеров рассмотрены однофазные и двухфазные решения уравнения НУШ. Для релятивистской цепочки Тоды было доказано, что пара уравнений состоящая из линеаризации и нелинейного ОИМ определяет нелинейную пару Лакса рассматриваемой цепочки. Показано, что из этой пары Лакса можно получить дифференциальные и дискретные уравнения, которые являются аналогами уравнений Дубровина. Насколько нам известно, аналоги уравнений Дубровина, описывающие динамику по пространственной переменной $n \in Z$, ранее не были получены. Пользуясь построенными аналогами уравнений Дубровина, для цепочки Руйсенарса-Тоды, найдены новые решения: вещественное и ограниченное частное решение в виде кинка, периодическое решение, выраженное через эллиптические функции Якоби, и решение, выраженное через $\wp$-функцию Вейерштрасса. Результаты полученные в работах [1] и [4] полностью удовлетворяют заявленному плану работ.

2) Дополнительной задачей, выполненной в отчетном периоде, является развитие метода классификации нелинейных интегрируемых уравнений с тремя независимыми переменными, хотя бы одна из которых является дискретной. Идея этого подхода основана на гипотезе, что подходящим образом обрывая уравнение по выбранному дискретному аргументу можно свести его к системе гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными, являющейся интегрируемой по Дарбу. Наши исследования дают убедительное подтверждение того, что наличие таких условий обрыва следует рассматривать как критерий интегрируемости трехмерных цепочек. В работах [5] и [6] исследована задача об описании интегрируемых цепочек вида

$$u^j_{n+1,x} = u^j_{n,x} + f(u^{j+1}_n, u^j_n, u^j_{n+1}, u^{j-1}_{n+1})$$

методом интегрируемых по Дарбу редукций. Основным инструментом исследования является характеристическая алгебра Ли системы дифференциально-разностных уравнений гиперболического типа. При классификации мы пользуемся утверждением, что конечно-полевая система дифференциально-разностных уравнений с двумя независимыми переменными интегрируема по Дарбу тогда и только тогда, когда ее характеристические алгебры по обоим направлениям конечномерны. Первый классификационный результат состоит в том, что в интегрируемом случае функция f имеет структуру квазиполинома от комбинации динамических переменных. Этот квазиполином определяется некоторым многочленом $P(\lambda)$. Задача классификации естественным образом распадается на четыре случая. К настоящему моменту исследованы два из них. Они характеризуются тем, что многочлен $P(\lambda)$ имеет вторую степень. В результате классификации удалось получить конкретный вид искомой функции f в виде явных выражений, содержащих несколько неопределенных постоянных параметров, для уточнения конкретных значений которых требуется дополнительное исследование.

Другой задачей в этом направлении являлось исследование интегрируемых трехмерных чисто дискретных цепочек типа Хироты-Мивы. Ставилась задача выяснения возможности применения классификационного подхода изложенного выше к цепочкам этого класса. С этой целью, в работах [2] и [3], было введено понятие интеграла, полного набора интегралов, характеристической алгебры дискретной системы уравнений гиперболического типа. Доказан критерий интегрируемости по Дарбу, который играет ключевую роль в классификационном алгоритме: система уравнений является интегрируемой в смысле Дарбу, т.е. допускает полные наборы характеристических интегралов по обоим направлениям, тогда и только тогда, когда ее характеристические алгебры по каждому из характеристических направлений имеют конечную размерность. Вторым этапом этого исследования была проверка гипотезы о том, что наличие специальных условий обрыва, позволяющих сведение трехмерной полностью дискретной цепочки к двумерным системам гиперболического типа произвольного порядка интегрируемым в смысле Дарбу указывает на интегрируемость этой трехмерной цепочки (в смысле наличия представления Лакса). Гипотеза была проверена на таких известных интегрируемых уравнениях, как уравнение Хироты–Мивы, Y-система, решеточное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, решеточное уравнение Тоды и ее модифицированный аналог. Для этих уравнений предъявлены примеры систем дискретных гиперболических уравнений малых размеров, полученных в результате наложения условий обрыва. Построены характеристические алгебры по обоим дискретным направлениям. Доказано, что алгебры имеют конечную размерность, построены базисы и предъявлены в явной форме полные наборы характеристических интегралов.

В работе [7] решалась задача исследования всех известных интегрируемых трехмерных уравнений с одной непрерывной и двумя дискретными переменными с точки зрения существования преобразований типа Миуры, т.е. преобразований, которые позволяют переводить одно уравнение в другое. Эти преобразования полезны при нахождении решений нелинейных уравнений, а также могут быть использованы в качестве альтернативного метода классификации трехмерных уравнений. В указанной работе предлагается эффективный метод поиска преобразований типа Миуры связывающих различные уравнения рассматриваемого типа, основанный на некотором соотношении, обобщающем понятие локального закона сохранения. Эффективность метода иллюстрируется с помощью известных интегрируемых уравнений. В работе также подробно исследовано одно из этих уравнений, которое является мало изученным. Для этого уравнения вычислен континуальный предел, исследованы конечнополевые редукции в виде интегрируемых по Дарбу систем уравнений гиперболического типа, для редукций малых порядков $N = 1$ и $N = 2$ представлены полные наборы характеристических интегралов и для случая $N = 1$ было найдено явное решение. Следует отметить, что в ходе исследования было найдено новое полудискретное уравнение, выходящее за пределы рассматриваемого класса. Для этого уравнения представлена пара Лакса.

3) В работе [8] исследуется вопрос применения каскада Лапласа в теории гиперболических уравнений солитонного типа. Хорошо известно, что каскадный метод Лапласа является эффективным инструментом для построения решений линейных уравнений гиперболического типа, а также нелинейных уравнений типа Лиувилля. Однако, связь между методом Лапласа и солитонными уравнения гиперболического типа является мало изученной. В работе [8], на примере двух известных нелинейных интегрируемых уравнений типа синус-Гордона, было показано, что метод Лапласа может быть использован в качестве эффективного способа построения операторов рекурсии и пар Лакса нелинейных уравнений. В работе найдены операторы рекурсии и пары Лакса для рассматриваемых уравнений. Отметим, что ранее для этих уравнений операторы рекурсии и пары Лакса не были известны.