ОТЧЕТ ЗА 2021 ГОД
О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
ПО ГРАНТУ ФОНДА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ»
(конкурс 2020 года)

КРИВОШЕЕВА ОЛЕСЯ АЛЕКСАНДРОВНА

I. Результаты, полученные в 2021 году

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty,\ k \to \infty$. Символом $\Xi(\Lambda)$ обозначим множество пределов сходящихся последовательностей вида $\left\{\bar{\lambda}_{k_j}/\left|\lambda_{k_j}\right|\right\}_{j=1}^{\infty}$($\bar{\lambda}$ — комплексное сопряжение). Множество $\Xi(\Lambda)$ замкнуто и является подмножеством единичной окружности $S(0,1)$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \left\{z^n e^{\lambda_k z}\right\}_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1}.$$

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и

$$H_D(\varphi) = \sup_{z\in D} \operatorname{Re}\left(ze^{-i\varphi}\right), \quad \varphi \in [0,2\pi]$$

— ее опорная функция. Положим

$$J(D) = \left\{e^{i\varphi} \in S(0,1) \colon H_D(\varphi) = +\infty\right\}.$$

Пусть $H(D)$ — пространство функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах $K \subset D$, и $W \subset H(D)$ – нетривиальное ($W \neq \{0\}, H(D)$) замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — кратный спектр оператора дифференцирования в подпространстве W. Тогда $\mathcal{E}(\Lambda)$ — семейство его собственных и присоединенных функций в W. Говорят, что подпространство W допускает спектральный синтез, если оно совпадает с замыканием $W(\Lambda, D)$ (в пространстве $H(D)$) линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Вместе с задачей о спектральном синтезе основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа, т.е. представления произвольной функции $g \in W(\Lambda, D)$ в виде ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$:

$$g(z) = \sum_{k,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n}\, z^n e^{\lambda_k z}. \tag{1}$$

Введем величину

$$S_\Lambda = \varliminf_{\delta\to 0} \varliminf_{k\to\infty} \frac{\ln\left|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)\right|}{|\lambda_k|}, \qquad q_\Lambda^k(z,\delta) = \prod_{\lambda_m\in B(\lambda_k,\delta|\lambda_k|),} \left(\frac{z-\lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{n_m},$$

где $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ — открытый круг с центром в точке λ_k и радиуса $\delta|\lambda_k|$. Величина S_Λ называется индексом конденсации последовательности Λ (впервые была введена Кривошеевым А.С. в 2004 году в статье «Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях», Изв. РАН. Серия математическая).

1) Был получен критерий представления произвольной функции $g \in W(\Lambda, D)$ рядом (1), который сходится во всей плоскости. Результат опубликован в журнале «Математические заметки».

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D *– выпуклая область, и система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в* $H(D)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\Xi(\Lambda) \subseteq J(D)$ *и* $\mathcal{S}_\Lambda > -\infty$;
2) *Каждая функция* $g \in W(\Lambda, D)$ *представляется рядом (1), который сходится равномерно на компактах плоскости.*

2) Чуть позже удалось обобщить предыдущий результат, распространив его на случай когда $\Xi(\Lambda)$ лежит в замыкании $\overline{J(D)}$ множества $J(D)$. Отметим, что этот случай принципиально отличается от случая $\Xi(\Lambda) \subseteq J(D)$. Был получен простой геометрический критерий фундаментального принципа, который опирается лишь на понятие индекса конденсации последовательности, составляющей спектр инвариантного подпространства. Результат опубликован в журнале «Issues of Analysis».

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, D *– выпуклая область, и система* $\mathcal{E}(\Lambda)$ *не полна в* $H(D)$. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *Каждая функция* $g \in W(\Lambda, D)$ *представляется рядом (1), который сходится равномерно на компактах из области* $D_0 = \Pi(H_D(\varphi_1), \varphi_1) \cap \Pi(H_D(\varphi_2), \varphi_2)$;
2) $\Xi(\Lambda) \subseteq \overline{J(D)}$, $\partial J(D) \subseteq \{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}\}$, $\mathcal{S}_\Lambda > -\infty$ *и* $\mathcal{S}_\Lambda(\varphi) = 0$, $\varphi \in \partial J(D) \backslash J(D)$.

Здесь:

$\Pi(a, \varphi) = \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(ze^{-i\varphi}) < a,\ \varphi \in \mathbb{R}\}$ – полуплоскость, когда $a \in \mathbb{R}$, и $\Pi(a, \varphi) = \mathbb{C}$, если $a = +\infty$;

и

$$\mathcal{S}_\Lambda(\varphi) = \min_{\{\lambda_{k(j)}\}} \lim_{\delta \to 0} \varliminf_{j \to \infty} \frac{\ln\left|q_\Lambda^{k(j)}(\lambda_{k(j)}, \delta)\right|}{\left|\lambda_{k(j)}\right|},$$

где минимум берется по всем подпоследовательностям $\{\lambda_{k(j)}\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ таким, что $\lambda_{k(j)}/\left|\lambda_{k(j)}\right| \to e^{-i\varphi}$, $j \to \infty$.

3) Были изучены подпространства $W^p(\Lambda, \omega)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$, которые являются замыканиями системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в весовых пространствах интегрируемых L_p^ω $(p \geq 1)$ и непрерывных C^ω функций на вещественной прямой соответственно. При естественных ограничениях на Λ (ограниченность индекса конденсации $\mathcal{S}_\Lambda$ и $n_k/\lambda_k \leq c, k \geq 1$) и выпуклый вес ω получены условия, при которых каждая функция из этих подпространств продолжается до целой и представляется рядом по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$, который сходится абсолютно и равномерно на компактах в плоскости. Результаты опубликованы в журнале «Lobachevkii Journal of Mathematics».

4) Еще одной важной задачей, наряду с проблемой фундаментального принципа, является задача о распределении особых точек на границы области сходимости ряда (1). Были изучены условия на последовательность показателей Λ, при которых область существования суммы ряда (1) совпадает с его областью сходимости (т.е. сумма ряда

аналитически не продолжается за пределы области сходимости). Результат опубликован в журнале «Известия вузов. Математика».

5) Был получен критерий того, когда из последовательности Λ_2 можно выделить измеримое множество Λ с заданной угловой плотностью при порядке $\rho(r)$, содержащее заданную подпоследовательность Λ_1 последовательности Λ_2. Также были получены условия, при которых из последовательности $\Lambda_2 \supseteq \Lambda^1$ можно выделить правильно распределенное множество Λ с заданной угловой плотностью при порядке $\rho(r)$, содержащее Λ^1. Результат был опубликован в журнале «Уфимский математический журнал».

II. Опубликованные и поданные в печать работы.

1. Кривошеев А.С., **Кривошеева О.А.** *Инвариантные подпространства целых функций*. Математические заметки. 2021. Т. 109, № 3. С. 380-396. (Web of Science, Scopus). DOI: 10.4213/mzm12678. Источник: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mzm&paperid=12678&option_lang=rus

2. Krivosheev A.S., **Krivosheeva O.A.** *Invariant Subspaces in Unbounded Domains.* Issues Anal. 2021. V. 10 (28), No 3. Pp. 91-107. (Web of Science, Scopus). DOI: 10.15393/j3.art.2021.10870. Источник: https://issuesofanalysis.petrsu.ru/article/genpdf.php?id=10870&lang=en

3. Krivosheev A.S., **Krivosheeva O.A.**, Kuzhaev A.F. *The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions From Weight Subspaces on a Line.* Lobachevkii Journal of Mathematics. 2021. V. 42, No 6. Pp. 1183-1200. (Web of Science, Scopus). DOI: 10.1134/S1995080221060159. Источник: https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080221060159

4. **Кривошеева О.А.**, Кривошеев А.С. *Область существования суммы ряда экспоненциальных мономов.* Изв. вузов. Математика. 2021. № 3. С. 56-66. (Web of Science, Scopus). DOI: 10.26907/0021-3446-2021-3-56-66. Источник: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ivm&paperid=9657&option_lang=rus

5. Кривошеев А.С., **Кривошеева О.А.**, Рафиков А.И. *Инвариантные подпространства в полуплоскости.* Уфимский математический журнал. 2021. Т. 13, № 3. С. 58-81. (Web of Science, Scopus). DOI: 10.13108/2021-13-3-57. Источник: http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=ufa&paperid=577&option_lang=rus

6. Krivosheeva O.A. *A Fundamental Principle for Unbounded Domains.* Materials of the International Conference «Complex Analysis and Its Applications», Dedicated to the 70th anniversary of Corresponding Member of the Russian Academy of Science V.N. Dubinin. Gelendzhik — Krasnodar, Russia May 30 — June 5, 2021. Pp. 59. Источник: https://www.kubsu.ru/interdep/docs/coman2021-14.06.2021.pdf

7. Кривошеева О.А. *Критерий фундаментального принципа для инвариантного подпространства аналитических функций в полуплоскости.* Материалы Международной

конференции Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 года. С. 176. Источник: https://vzmsh.math-vsu.ru/files/vzmsh2021.pdf

III. Участие в конференциях и школах

1. Секционный доклад «A Fundamental Principle for Unbounded Domains» на Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения», посвященная 70-летию со дня рождения члена-корреспондента Российской академии наук, доктора физико-математических наук, профессора Владимира Николаевича Дубинина. 30 мая – 5 июня 2021 года, г. Геленджик.

2. Секционный доклад «Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в полуплоскости» на XI Международном симпозиуме «Ряды Фурье и их приложения». 27 мая-3 июня 2021 года, поселок Дюрсо, Краснодарский край.

3. Участник Всероссийского съезда учителей и преподавателей математики и информатики. 18-19 ноября 2021 года, г. Москва (МГУ).

4. Член организационного комитета Третьей Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2021». 6-9 октября, г. Уфа.

5. Заместитель председателя организационного комитета XII Международной школы-конференции «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» для молодых ученых, аспирантов и студентов. 6-9 октября 2021 года, г. Уфа.

IV. Педагогическая деятельность

1. Чтение лекций по дисциплинам «Математический анализ» и «Дискретная математика» для студентов факультета математики и информационных технологий Башкирского государственного университета.

2. Под моим руководством защищены две выпускные квалификационные работы бакалавра (Круглов А.Ю. и Гатиятуллина А. З.) и одна выпускная квалификационная работа магистра (Дулясова Э.С.).

3. Научный руководитель двух аспирантов третьего года обучения (Кужаев А.Ф. и Рафиков А.И.).

4. Член жюри республиканского этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике.