ОТЧЕТ ЗА 2022 ГОД
О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ
ПО ГРАНТУ ФОНДА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ»
(конкурс 2020 года)

КРИВОШЕЕВА ОЛЕСЯ АЛЕКСАНДРОВНА

I. Результаты, полученные в 2022 году

1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ − последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей $n_k \in \mathbb{N}$. Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \to \infty,\ k \to \infty$. Положим

$$m(\Lambda) = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{n_k}{|\lambda_k|}, \qquad \sigma(\Lambda) = \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\ln j}{|\xi_j|},$$

где $\{\xi_j\}$ − неубывающая по модулю последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз.

Рассмотрим ряд экспоненциальных мономов, т.е. ряд вида

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}. \tag{1}$$

Исследуется задача описания пространства коэффициентов сходящихся рядов (1), характер сходимости этих рядов, описывается область их сходимости и изучается вопрос о продолжении сходимости рядов (1).

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями − рядами экспонент (т.е. рядами вида (1), где $n_k = 1,\ k \geq 1$), рядами Дирихле ($n_k = 1$ и $\lambda_k > 0$) и рядами Тейлора имеет богатую историю. Их исследование берет свое начало в трудах Тейлора, Коши, Адамара, Абеля и Дирихле. Указанные выше задачи для таких рядов изучались в работах Е. Хилле, Г.Л. Лунца, А.Ф. Леонтьева и других математиков.

Для рядов (1), как и в теории рядов экспонент (в частности, степенных рядов и рядов Дирихле) первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости (это включает в себя задачу о продолжении сходимости) и характер сходимости рядов, а также восстановление области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля, а последняя − при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля ([1], гл. 2, лемма 1.1), в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле в одной точке z_0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re} z < \mathrm{Re} z_0\}$. Если $\sigma(\Lambda) = 0$, то ([2], гл.2, теорема 1.1) эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости $\{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re} z < \mathrm{Re} z_0 - \varepsilon\}$. Для рядов Дирихле имеется также полный аналог теоремы Коши-Адамара, в котором при условии $\sigma(\Lambda) = 0$ вычисляется абсцисса сходимости ([1], гл. 2, теорема 1.2).

В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат ([3], [1], гл. 2, теорема 2.1) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно ([1], гл. 2, теорема 2.2). Если выполнено условие $\sigma(\Lambda) = 0$, то ([1], гл. 2, теорема 2.3) простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого для рядов экспонент известен также ([3], [4], [5] и [2], теорема 3.1.3) аналог теоремы Коши-Адамара. В случае общих рядов вида (1) можно отметить лишь результат из работы [6]. Здесь доказывается, что область абсолютной сходимости ряда (1) выпуклая, если $m(\Lambda) = 0$.

В работе [7] при условиях $\sigma(\Lambda) = m(\Lambda) = 0$ приводится полный аналог теоремы Абеля для рядов (1) и в частности, для рядов экспонент. Показывается, что областью сходимости ряда (1) является выпуклая область специального вида. Доказывается, что поточечная сходимость ряда (1) в этой области эквивалентна его абсолютной сходимости, равномерной сходимости на компактах и даже сходимости в более сильной топологии. Приводится также аналог теоремы Коши-Адамара, который, как частные случаи, содержит все указанные выше подобные результаты.

Недостатком работы [7] является условие $m(\Lambda) = 0$, которое хорошо подходит лишь для случая ограниченной области сходимости ряда (1). В случае, когда эта область неограниченна, условие $m(\Lambda) = 0$ становится слишком жестким. Были получены результаты и опубликованы в журнале «Уфимский математический журнал», аналогичные результатам работы [7] при более слабом (в случае неограниченной области) ограничении на кратности n_k точек λ_k.

2. Пусть теперь $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ − последовательность различных положительных чисел λ_k и их кратностей n_k. Считаем, что $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ и $\lambda_k \to \infty$, $k \to \infty$. Символом $n(t, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k (с учетом их кратностей n_k), попавших в открытый круг $B(0, t)$, и пусть

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} n(t,\Lambda)/t = \varlimsup_{n\to\infty} n/\mu_n$$

− верхняя плотность последовательности Λ, где $\{\mu_n\}$ − последовательность, составленная из точек λ_k, причем каждая λ_k встречается в ней ровно n_k раз. Положим еще

$$m(\Lambda) = \varlimsup_{k\to\infty} \frac{n_k}{\lambda_k}, \qquad \sigma_\Lambda(r) = \sum_{\lambda_k<r} \frac{n_k}{\lambda_k}.$$

Пусть $\rho > 0$. Символом Ω_ρ обозначим множество неотрицательных выпуклых функций на оси $\mathbb{R}$ таких, что $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \le \rho|t|$, $t \le 0$, и

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(t)/t = +\infty. \tag{2}$$

При этих условиях $\omega(t)$, $t > 0$, − неубывающая функция. Подмножество $\Omega_{\Lambda,\rho}$, для которого выполнено неравенство

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega\big(2\sigma_\Lambda(t)\big)}{t^2}\,\mathrm{d}t < \infty$$

обозначим $\Omega_{\Lambda,\rho}$. В работе рассматриваются весовые пространства комплекснозначных интегрируемых функций на вещественной прямой $(p \ge 1)$

$$L_p^{\omega} = \left\{ f: \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(t) e^{-\omega(t)} \right|^p \mathrm{dt} \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

и непрерывных функций на вещественной прямой

$$C^{\omega} = \left\{ f: \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| f(t) e^{-\omega(t)} \right| < \infty \right\}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Введем семейство экспоненциальных мономов

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{t^n e^{\lambda_k t}\}_{k=1,n=0}^{\infty, n_k - 1}.$$

Система $\mathcal{E}(\Lambda)$ принадлежит пространству L_p^{ω} (C^{ω}) тогда и только тогда, когда верно (2).

Символами $W^p(\Lambda, \omega)$ $(p \geq 1)$ и $W^0(\Lambda, \omega)$ обозначим соответственно замыкания линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda)$ в пространствах L_p^{ω} и C^{ω}.

Были изучены условия, при которых каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)$ $\left(W^0(\Lambda, \omega)\right)$ продолжается до целой функции F, представимой во всей плоскости рядом

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{n_k - 1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Подобные задачи рассматривались в работах [8] и [9] при условиях $n_k = 1$ и

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq h, \ k \geq 1. \tag{4}$$

В частности, это означает, что последовательность Λ имеет плотность

$$n(\Lambda) = \lim_{t \to +\infty} n(t, \Lambda)/r \leq 1/h.$$

Отметим результат из работы [10] (теорема 2.1). В ней доказывается, что каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)\left(W^0(\Lambda, \omega_1)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3), если выполнены следующие условия на Λ и ω. Последовательность Λ должна принадлежать классу $U(d, 0)$, который строится при помощи простой $(n_k = 1)$ последовательности, удовлетворяющей условию (4). В частности, принадлежность Λ классу $U(d, 0)$ означает, что Λ имеет плотность $n(\Lambda) = d > 0$, верно (1.4) и $n_k \leq c(\lambda_k)^{\alpha}, \ k \geq 1$, где $c > 0$ и $\alpha \in (0,1)$. Функция $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$ и выполнены еще два условия: $\omega(t) \geq t^2, \ t \geq \tau \geq 0$, для каждого $A > 0$ существует $t(A) > 0$ такое, что $\omega(t + A) \geq \omega(t) + t, \ t \geq t(A)$.

В работе [11] указанная задача решается при существенно более слабых ограничениях, чем [8]-[10]. Доказано следующее. Пусть $\rho > 0$, последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ такая, что $\mathcal{S}_{\Lambda} > -\infty$ (индекс конденсации $\mathcal{S}_{\Lambda}$ был определен в отчете 2021 года), $m(\Lambda) < \infty$, $\omega \in \Omega_{\Lambda,\rho}$. Тогда каждая функция $f \in W^p(\Lambda, \omega)\left(W^0(\Lambda, \omega_1)\right)$ продолжается до целой функции F, для которой имеет место представление (3). При этом ряд сходится абсолютно и равномерно на компактах плоскости. Были развиты результаты работы [4]. Получен аналогичный результат, но при условиях более слабых чем в [4]. Условие $\mathcal{S}_{\Lambda} > -\infty$ заменяется условием $\mathcal{S}_{\Lambda,0} = 0$. Вышеупомянутые результаты были опубликованы в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия математика, механика, информатика».

3. Была исследована проблема полноты системы экспоненциальных мономов с положительными показателями в пространстве функций аналитических в выпуклой области комплексной плоскости. Работа была опубликована в журнале «lobachevskii Journal of Mathematics». В этой работе были получены достаточные условия полноты этой системы. Они сформулированы при помощи простых геометрических характеристик области и последовательности (вертикальный диаметр и логарифмическая плотность). Также получен критерий полноты такой системы в произвольной выпуклой области при условии совпадения верхней и максимальной плотностей последовательности. Этот результат обобщает известный результат Б.Я. Левина и А.Ф. Леонтьева для измеримых положительных последовательностей. При его доказательстве использовалась теорема единственности для целых функций экспоненциального типа, доказанная в этой же работе. Полученная теорема единственности обобщает соответствующие результаты Ф. Карлсона и Л.А. Рубеля.

Список литературы.

1. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука. 1983.

2. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. М.: Наука. 1976.

3. Hille E. Note on Dirichlet’s series with complex exponents. Ann. of Math. 1924. V. 25. P. 261-278.

4. Лунц Г.Л. О некоторых обобщениях рядов Дирихле. Матем. сб. 1942. Т. 10(52). № 1-2, С. 35-50.

5. Лунц Г. Л. Об одном классе обобщенных рядов Дирихле. УМН. 1957. Т. 12, вып. 3(75). С. 173-179.

6. Братищев А.В. Базисы Кете, целые функции и их приложения. Дисс. на соискание уч. ст. докт. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону. 1995.

7. Кривошеева О. А. Область сходимости рядов экспоненциальных мономов, Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 2. С. 43–56.

8. J.M. Anderson, K.G. Binmore. Closure theorems with applications to entire functions with gaps, Trans. Amer. Math. Soc. 161 (1971) 381–400.

9. G.T. Deng, Incompleteness and closure of a linear span of exponential system in a weighted Banach space, J. Approx. Theory. 2003. V. 125 (1). P. 1–9.

10. E. Zikkos. The Closed Span of some Exponential System in Weighted Banach Spaces on the Real Line and a Moment Problem. Analysis Mathematica. 2018. V. 44 (4). P. 605-630.

11. A. S. Krivosheev, O. A. Krivosheeva, A. F. Kuzhaev, The Representation by Series of Exponential Monomials of Functions From Weight Subspaces on a Line. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V 42:6. P. 1183–1200.

II. Опубликованные и поданные в печать работы.

Научные статьи

1. Кривошеев А.С., **Кривошеева О.А.** *Сходимость рядов экспоненциальных мономов.* Уфимский математический журнал. 2022. Т. 14, № 4. С. 60-72. (Web of Science, Scopus, Ядро РИНЦ). https://matem.anrb.ru/sites/default/files/files/vup56/Krivosheev.pdf

2. Кривошеев А.С., **Кривошеева О.А.** *Представление функций на прямой рядами экспоненциальных мономов.* Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: математика, механика, информатика. 2022. Т. 22, № 4. С. 416-429. (Web of Science, Scopus, Ядро РИНЦ). https://mmi.sgu.ru/ru/articles/predstavlenie-funkciy-na-pryamoy-ryadami-eksponencialnyh-monomov

3. Krivosheev A.S., **Krivosheeva O.A.**, Kuzhaev A.F. *A completeness of a system of exponential monomials with positive exponents.* Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. V. 43, No. 6. Pp. 1536-1544. (Web of Science, Scopus, Ядро РИНЦ) https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49515665

4. **Кривошеева О.А.** *Критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств в произвольной выпуклой области.* Материалы 21-й международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения». 2022. Том Выпуск 21. С. 152-154. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49166942

5. **Кривошеева О.А.** *Построение исключительного множества.* Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2022». Том 1. С. 121-123. https://conf-bashedu-fmit.ru/static/media/Тезисы%20УОМШ-22%20(1%20том).660c1a63.pdf

Учебные пособия

1. Исаев К.П., **Кривошеева О.А.**, Путинцева А.А. Дискретная математика: курс лекций. Уфа: РИЦ БашГУ. 2022. 128 с. ISBN 978-5-7477-5481-2.

2. Исаев К.П., **Кривошеева О.А.**, Путинцева А.А. Дискретная математика: сборник задач. Уфа: РИЦ БашГУ. 2022. 72 с. ISBN 978-5-7477-5483-6.

3. Исаев К.П., **Кривошеева О.А.**, Путинцева А.А. Дискретная математика: лабораторные работы. Уфа: РИЦ БашГУ. 2022. 140 с. ISBN 978-5-7477-5482-9.

III. Участие в конференциях и школах

1. Секционный доклад «Построение исключительного множества» на Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2022». 28 сентября – 01 октября 2022 года, г. Уфа.

2. Член организационного комитета Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа - 2022». 28 сентября – 01 октября 2022 года, г. Уфа.

3. Заместитель председателя организационного комитета XIII Международной школы-конференции «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» для молодых ученых, аспирантов и студентов. 19-22 октября 2022 года, г. Уфа.

4. С 17 января по 14 марта 2022 года проходила обучение по курсу «Управление университетами» в Московской школе управления «Сколково».

5. С 7 по 11 февраля проходила «Специализированный курс по теории и практике оценки научной результативности» компании Clarivate.

IV. Педагогическая деятельность

1. Чтение лекций по дисциплинам «Математический анализ» и «Дискретная математика» для студентов факультета математики и информационных технологий Уфимского университета науки и технологий.

2. Чтение лекций по дисциплине «Цифровизация научной деятельности» для аспирантов всех специальностей Уфимского университета науки и технологий.

3. Руководитель педагогической и производственной практик у аспирантов факультета математики и информационных технологий Уфимского университета науки и технологий.

4. Научный руководитель двух аспирантов четвертого года обучения (Кужаев А.Ф. и Рафиков А.И.).

5. Член жюри республиканского этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике.