Молодая математика России
Отчёт Полянского Александра за 2021 год

1 Результаты, полученные в этом году

1.1 Графы Тверберга

Теорема Тверберга является одним из основополагающих результатов современной дискретной и выпуклой геометрии. Она была доказана Твербергом [Tve66] в 1966 году и утвержает, что для любого множества из $(r-1)(d+1)+1$ точки в $\mathbb{R}^d$ найдётся разбиение точек на r частей такое, что их выпуклые оболочки пересекались.

Исследовалась следующая задача типа Тверберга. Для графа, вершины которого является конечное множество точек в d-мерном евклидовом пространстве рассмотрим замкнутые (открытые) шары, у которых диаметрами являются рёбра графа. Граф будет называться *(открытым) графом Твербрега*, если эти шары имеют общую точку. Исследование графов Тверберга было инициировано Хуемером и соавторами в [HPLSS19]. В частности, они доказали, что для любого четного числа точек на *плоскости*, половина из которых покрашены в красный цвет, а другая половина — в синий, найдётся красно-синее полное паросочетание, являющееся графом Тверберга. Познее Соберон и Танг [ST21] доказали, что для *нечётного* числа точек на *плоскости* найдётся гамильтонов цикл, являющийся графом Тверберга. В совместной работе [5] с А. Василевским и О. Пирахмадом удалось в некотором смысле обобщить или дополнить данные результаты:

- Для любого конечного числа точек на плоскости найдётся гамильтонов цикл, являющийся графом Тверберга.
- Для любых n красных и n синих точек в d-мерном евклидовом пространстве найдётся полное красно-синее паросочетание, являющееся графом Тверберга.
- Для любого четного числа точек в общем положении в d-мерном евклидовом пространстве найдётся полное паросочетание, являющееся *открытым* графом Тверберга.

Для доказательства использовался подход со перестройкой паросочетаний в чём-то напоминающий подход с перестройкой r-разбиений, который Вречица и Тверберг [TV93] (а позднее Руднев [Rou01]) использовали для доказательства теоремы Тверберга.

1.2 Непересекающиеся рёбра геометрических графов

Геометрическим графом называется изображение графа на плоскости, у которого вершины являются точками в общем положении, а рёбрами соответсвующие (возможно пересекающиеся) отрезки. Одна из классических задач вычислительной геометрии и изображений графов, поставленная Эрдешем, звучит следующим образом.

Для натуральных k и n найти наименьшее $e_k(n)$ такое, что любой геометрический граф на n вершинах и с $e_k(n)+1$ рёбрами содержит $k+1$ попарно непересекающееся ребро. Основная гипотеза утверждает, что $e_k(n) = O(kn)$. Было получено ряд оценок сверху на $e_k(n)$ при маленьких значениях $k = 2, 3$ в работах Алона и Эрдёша [AE89], Черни [Čer05] и других, а также общие оценки, которые верны при любом k, в работах Паха и Торосик [PT94] и Тота [Tót00]. Наилучшая общая оценка выглядит следующим образом $e_k(n) = O(k^2 n)$.

Мотивированные вопросом о $e_k(n)$ в совместной работе [6] с Р. Садыковым и Н. Черногой удалось доказать следующий результат.

- В геометрическом графе на n вершинах и с e рёбрами найдётся $\frac{n}{2}\binom{2e/n}{3}$ пар непересекающихся рёбер при условии, что $2e \geq n$ и каждая вершина лежит в выпуклой оболочке своих соседей. Мы полагаем, что данная оценка должна выполняться без условия на расположение вершин относительно своих соседей.

Для доказательства мы во многом черпали идеи из работ [Čer05] и [Tót00].

1.3 Запрещённые подграфы для графов с наименьшим собственным значением ограниченных снизу

Одна из центральных задач спектральной теории графов — это классификация графов с ограниченными собственными значениями. В 1992 году Буссемейкер и Неумайэр [BN92] задали следующий вопрос. Найти все λ такие, что существует конечное число запрещённых индуцированных подграфов для семейства графов со спектральным радиусом[1] не превосходящем λ. Эту задачу нам удалось решить в совместной работе с Цз.Цзяном [JP20] в контексте задачи о максимальной мощности множества равноугольных прямых[2] с фиксированным углом и растущей размерностью. Недавно эта задача о равноугольных прямых была полностью решена в работе Цзяна, Тидора, Йао, Жанга и Жао [JTY$^+$21]. Позднее этот же коллектив авторов [JTY$^+$20] рассмотрел задачу о максимальной мощности сферического множества с двумя фиксированными расстояниями и растущей размерности[3] и нашёл связь с наименьшими собственными значениями графов со знаком[4]. Мотивированные этой работы в совместной работе [7] с Цз. Цзыном удалось доказать следующие результаты:

- Мы описали все такие λ, для которых существует конечное число запрещённых индуцированных подграфов для семейства графов, у которых наименьшее собственное значение не меньше λ. (Этот вопрос ранее был также поставлен Буссемейкером и Неумайэром [BN92]. Полученные результат дополняет результат Хоффмана [Hof77], в котором были описаны данные графы при $\lambda = 2$.)

- Описали все такие λ, что существует конечное число запрещённых индуцированных подграфов для семейств графов со знаком, у которых наименьшее собственное значение не меньше λ.

[1] Спектральный радиус графа — *наибольшее собственное значение* матрицы инцидентности графа.

[2] Множество прямых в $\mathbb{R}^d$ называется *равноугольным*, если уголы между любыми двумя из них равны.

[3] Сферическим множеством с k расстояниями называется конечное множество точек на сфере такое, что между точками этого множества можно найти не более k расстояний.

[4] *Графом со знаком* называется граф, у которого каждому ребру приписано число ± 1.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

[1] Ф. К. Нилов, А. А. Полянский, *Теорема типа Сильвестра–Галлаи для абелевых групп*, Матемематические заметки, **110**:1 (2021), 99–109.

[2] A. Polyanskii, *A Cap Covering Theorem*, Combinatorica **41** (2021), 695–702.

[3] A. Kupavskii, A. Polyanskii, I. Tomon, D. Zakharov, *The Extremal Number of Surfaces*, International Mathematics Research Notices, **rnab099**, `https://doi.org/10.1093/imrn/rnab099`.

[4] M. Naszódi, A. Polyanskii, *Perron and Frobenius Meet Carathéodory*, Electronic Journal of Combinatorics, Volume 28, Issue 3 (2021), P3.26.

[5] O. Pirahmad, A. Polyanskii, A. Vasilevskii, *On a Tverberg graph*, preprint, `https://arxiv.org/abs/2108.09795`.

[6] N. Chernega, A. Polyanskii, R. Sadykov, *Disjoint edges in geometric graphs*, preprint `https://arxiv.org/abs/2111.05425`.

[7] Z. Jiang, A. Polyanskii, *Forbidden induced subgraphs for graphs and signed graphs with eigenvalues bounded from below*, preprint, `https://arxiv.org/abs/2111.10366`.

3 Участие в конференциях и школах

- Руководил минисимпозиумом *Combinatorial and geometric structures* конференции **MoCCA’20** (онлайн).

  `http://mipt2020.combgeo.org/schedule-2/`

- Был докладчиком приглашённого минисимпозиума *Discrete Geometry* (рук. Ю. Жао) на конференции **CanaDAM 2021** (25–28 мая, онлайн). Доклад *A cap covering theorem.*

  `https://canadam.math.ca/2021/program/schedule_invited_mini#dg`.

- Был докладчиком минисимпозиума *Convex bodies – approximation and sections* (рук. М. Насоди и К. Сванепул) на конференции **8$^{\text{th}}$ European Congress of Mathematics** (20–26 июля, онлайн). Доклад *A cap covering theorem.*

  `https://www.8ecm.si/minisymposia`

- Был докладчиком *Комбинаторика и геометрия* (рук. А.М. Райгородский) на конференции **Международных Математических Центров** (9–13 августа, Сириус). Доклад *Существование паросочетания Тверберга.*

  `https://siriusmathcenter.ru/all-russian-conference/program#section-14`.

- Был докладчиком секции *Комбинаторика и дискретная геометрия* на конференции **Адыгейские математические чтения** (12–17 октября, АГУ, Майкоп). Доклад *Цветная теорема типа Тверберга.*

  `https://amra.cmcagu.ru/`.

4 Педагогическую деятельность

- Веду годовой курс по дискретной геометрии для англомагистрантов МФТИ.

- Был научным руководителем четырёх магисторских работ (О. Пирахмад, А. Сергунин, А. Зайков, К. Бхоумик) и 1 бакаврской работы (А. Василевский) в МФТИ, а также 1 бакалаврской работы (Е. Бакаев) в КМЦ АГУ. В настоящий момент под моим руководством сейчас работают 3 аспиранта (А. Голованов, Р. Садыков и А. Сергунин), 1 магистр (А.Василевский) и 1 бакалавр (П.Барабанщикова).

- Вел миникурс *Геометрическая комбинаторика* на школе **Toric topology and combinatorics** (1–5 ноября, Сириус).

Список литературы

[AE89] N. Alon and P. Erdös, *Disjoint edges in geometric graphs*, Discrete & Computational Geometry **4** (1989), no. 4, 287–290.

[BN92] F. C Bussemaker and A. Neumaier, *Exceptional graphs with smallest eigenvalue* -2 *and related problems*, Mathematics of Computation **59** (1992), no. 200, 583–608.

[Čer05] J. Černý, *Geometric graphs with no three disjoint edges*, Discrete & Computational Geometry **34** (2005), no. 4, 679–695.

[Hof77] A. J. Hoffman, *On limit points of the least eigenvalue of a graph*, Ars Combin. (1977), 3–14.

[HPLSS19] C. Huemer, P. Pérez-Lantero, C. Seara, and R. I Silveira, *Matching points with disks with a common intersection*, Discrete Mathematics **342** (2019), no. 7, 1885–1893. Available at `https://arxiv.org/abs/1902.08427`.

[JP20] Z. Jiang and A. Polyanskii, *Forbidden subgraphs for graphs of bounded spectral radius, with applications to equiangular lines*, Israel Journal of Mathematics **236** (2020), no. 1, 393–421.

[JTY$^+$20] Z. Jiang, J. Tidor, Y. Yao, S. Zhang, and Y. Zhao, *Spherical two-distance sets and eigenvalues of signed graphs*, arXiv preprint (2020). `https://arxiv.org/pdf/2006.06633`.

[JTY$^+$21] Z. Jiang, J. Tidor, Y. Yao, S. Zhang, and Y. Zhao, *Equiangular lines with a fixed angle*, Annals of Mathematics **194** (2021), no. 3, 729–743.

[PT94] J. Pach and J. Törőcsik, *Some geometric applications of dilworth's theorem*, Discrete & Computational Geometry **12** (1994), no. 1, 1–7.

[Rou01] J.-P. Roudneff, *Partitions of Points into Simplices with k-dimensional Intersection. Part I: The Conic Tverberg's Theorem*, European Journal of Combinatorics **22** (July 2001), no. 5, 733–743.

[ST21] P. Soberón and Y. Tang, *Tverberg's Theorem, Disks, and Hamiltonian Cycles*, Annals of Combinatorics **25** (2021), 995–1005. `https://doi.org/10.1007/s00026-021-00557-0`. Available at `https://arxiv.org/abs/2011.12218`.

[Tót00] G. Tóth, *Note on geometric graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **89** (2000), no. 1, 126–132.

[TV93] H. Tverberg and S. Vrećica, *On Generalizations of Radon's Theorem and the Ham Sandwich Theorem*, European Journal of Combinatorics **14** (May 1993), no. 3, 259–264.

[Tve66] H. Tverberg, *A Generalization of Radon's Theorem*, Journal of the London Mathematical Society **s1-41** (1966), no. 1, 123–128.