Итоговый отчет по гранту конкурса «Молодая математика России»

Семенов Андрей Вячеславович

1. Исходная цель проекта (2020 год)

Симметрические пространства — один из центральных объектов дифференциальной геометрии, важный как сам по себе, так и в связи с группами Ли. В середине 1950-ых годов Борис Розенфельд заметил, что для многих (и в том числе почти для всех исключительных) симметрических пространств существует реализация как «эллиптической плоскости», что является глобальным аналогом «магического квадрата» Фрейденталя-Титса: например, симметрическое пространство FII является плоскостью Кэли, а симметрическое пространство EVIII является эллиптической плоскостью над тензорными произведением двух алгебр октав. Этот результат был формализован Винбергом и Ацуямой в «классическом» случае над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.
В заявке мы ставили своей целью обобщение результатов Ацуямы и Винберга на симметрические пространства типов EIII и EVI над *произвольными* полями различной характеристики. Для этого необходимо было придумать новую идею и новые методы работы, потому что для достижения нужных ответов Ацуямой существенным образом используется базовое поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, позволяющее решить вопрос аналитическими идеями. Таким образом, мы поставили естественный вопрос «можно ли избавиться от вещественнозначных предположений для достижения аналогичных результатов в случаях симметрических пространств EIII и EVI?».

2. Итоги проекта (2023 год)

В настоящее время поставленная задача **решена полностью**: для пространств типа EIII получен исчерпывающий результат для произвольного поля, а для пространств типа EVI получен полный результат для произвольного поля характеристики нуль. Еще в прошлом году была построена и описана соответствующая геометрия точек и прямых на пространстве $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$ (что соответствует случаю EIII) и геометрия точек и прямых в случае пространства $E_7/D_6 + A_1$ (что соответствует случаю EVI).
Соответствующие результаты сформулированы в двух статьях:

[1] Viktor A. Petrov, Andrei V. Semenov, *Geometry of symmetric spaces of type EIII*, «Алгебра и анализ», 34 (2022) №6, стр. 217-227.

[2] Viktor A. Petrov and Andrei V. Semenov, *Geometry of symmetric spaces of type EVI*, принято к печати в журнале Journal of Algebra, https://arxiv.org/abs/2208.13730

Результаты, полученные мною в процессе выполнения работ по гранту «Молодая математика России», составили основу моей диссертации на соискание степени кандидата физико-математических наук, которая была успешно защищена в СПбГУ 19 января 2023 года. Ссылка на диссертацию:
`https://disser.spbu.ru/files/2022/disser_semenov.pdf`

3. Формулировка результатов проекта

В этом разделе мы кратко изложим основные результаты статей [1] и [2].

Симметрическое пространство типа EIII

Пусть F — поле характеристики не 2 и не 3 и K — его квадратичное расширение. Обозначим через B алгебру Брауна $B(A)$ (единственной) 27-мерной алгебры Альберта над F. Она имеет структуру структурируемой алгебры, и можно рассмотреть ее кватернионные подалгебры (в смысле структурируемых алгебр).

Лемма 1. *Множество $\mathcal{Q}$ кватернионных подалгебр в B биективно множеству рациональных точек симметрического пространства типа $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$.*

Заметим, что множество рациональных точек симметрического пространства типа $E_6/D_5 \cdot \mathbb{G}_m$ является открытым аффинным в сужении Вейля $R_{K/F}(Aut(B)^o_K/P_1)$, где P_i — максимальная параболическая подалгебра, ассоциированная с корнем α_i в диаграмме Дынкина E_6.
Теперь рассмотрим отображение $\pi(Q) = K_Q^\perp \cdot B$, где $Q \in \mathcal{Q}$ и $K_Q^\perp$ обозначает ортогональное дополнение к K в Q, а умножение поточечное.

Лемма 2. *$\pi(Q)$ является подалгеброй в B и $\dim_F \pi(Q) = 22$ для любой кватернионной подалгебры Q в B. Более того, π индуцирует биекцию открытых подмногообразий в $R_{K/F}(Aut(B)^o_K/P_1)$ и $R_{K/F}(Aut(B)^o_K/P_6$ соответственно.*

Будем называть кватернионные подалгебры в B **точками**, а 22-мерные подалгебры, которые имеют вид $\pi(Q)$ — **прямыми**. Точка Q **инцидентна** прямой L, если $Q \leqslant L$ как подалгебра.
В статье [1] мы показали, что есть всего лишь три возможности для прямых (и точек соответственно): они могут либо совпадать, либо быть в общем положении, либо имеет место третий тип отношений, который мы назовем специальным. Основным результатом нашей работы для случая EIII является сформулированная ниже теорема, полностью описывающая геометрию этого симметрического пространства.

Теорема 3.

1. *Для любых прямых L_1, L_2, если они в общем положении, то они пересекаются не более чем в одной точке. Если к тому же $Aut(B)^o$ анизотропная группа, то они пересекаются ровно в одной точке.*

2. *Для любых прямых L_1, L_2, если они в специальном положении, то множество точек, в которых они пересекаются, биективно множеству рациональных точек симметрического пространства $A_4/A_3 \cdot \mathbb{G})_m$. В частности, это (с точностью до биекции) аффинное открытое подмногообразие в $R_{K/F}(\mathbb{P}^4)$.*

3. *Множество точек, принадлежащих данной прямой, биективно рациональным точкам симметрического пространства $D_5/D_4 \cdot \mathbb{G}_m$. В частности, это (с точностью до биекции) аффинное открытое подмногообразие сужения Вейля K на F 8-мерной изотропной гладкой квадрики.*

Симметрическое пространство типа EVI

Сбалансированной симплектической тернарной алгеброй (ССТА для краткости) будем называть тернарную алгебру A с симплектической формой $\langle -, - \rangle$ такую, что выполнены следующие два свойства:

1. $xyz = yxz + \langle x, y \rangle z$;

2. $xyz = xzy + \langle y, z \rangle x$.

Для полупростой линейной группы G через $\mathcal{S}(G)$ мы будем обозначать многообразие всех подгрупп типа A_1 в G таких, что вложение соответствующих алгебр Ли имеет мультииндекс Дынкина $(0,\dots,1,\dots,0)$ (такие подгруппы далее называются микровесовыми). Тогда симметрическое пространство типа EVI можно реализовать как $\mathcal{S}(G)$ для некоторой группы G типа E_7 такой, что $\mathcal{S}(G)(F)\neq\emptyset$.

Используя язык кватернионных гифтов, введенный в статье «A rational construction of Lie algebras of type E_7» В. А. Петровым, а также используя теорию CCTA, в статье [2] нами была сформулирована и доказана основная теорема, описывающая геометрию симметрического пространства типа EVI. В качестве как точек, так и прямых для EVI мы возьмем элементы $\mathcal{S}(G)(F)$. Будем говорить, что точка **инцидентна** прямой, если соответствующие подгруппы $A_1^{(1)}$ и $A_1^{(2)}$ коммутируют поточечно над $\overline{F}$. Тогда основной исследуемый вопрос сводится к тому, чтобы описать множество прямых, которые проходят через две точки в симметрическом пространстве EVI над F.

Теорема 4. *Пусть A и B — две точки в $\mathcal{S}(G)$ для анизотропной группы G типа E_7 над базовым полем F характеристики нуль. Тогда существует симметрическое пространство C над F из следующего списка:*

1. D_6/D_4+2A_1 *(в случае $A=B$),*
2. $D_4/4A_1\coprod\mathrm{pt}$ *(в случае коммутирования A и B),*
3. $\mathrm{pt}\coprod\mathrm{pt}\coprod\mathrm{pt}$ *(в общем положении),*
4. $B_3/3A_1\coprod\mathrm{pt}$,
5. $A_3/A_2\cdot\mathbb{G}_m\coprod\mathrm{pt}$,
6. $B_2/2A_1\coprod\mathrm{pt}$,
7. $A_5/A_3\cdot\mathbb{G}_m+A_1$,
8. C_3/C_2+A_1,

и существует некоторая скрученная форма C' пространства C такая, что выполнено следующее равенство:

$$\{L \text{ — прямая} \mid L \text{ проходит через } A \text{ и } B\}=C'(F).$$

4. Дополнение: фреймы Габора на решетках

В 2023 году я дополнительно занялся исследованием некоторых вопросов частотно-временного анализа, результатом которого стала статья [3] (см. раздел «Опубликованные и поданные в печать работы»), поддержанная грантом «Молодая математика России».

Постановка задачи

Одним из основных вопросов частотно-временного анализа является представление произвольной функции $f\in L^2(\mathbb{R})$ как суммы «хорошо локализованных» функций в частотно-временной плоскости. Чтобы этого добиться, для $g\in L^2(\mathbb{R})$ рассмотрим ее систему Габора $\{\pi_{x,w}g\}_{(x,w)\in\Lambda}$, где $\pi_{x,w}g(t)=e^{2\pi i\omega t}g(t-x)$, а $\Lambda\subset\mathbb{R}^2$.

Классический вопрос: когда такая система по «стандартной» решетке $\Lambda=\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}$ хорошо аппроксимирует все функции из $L^2(\mathbb{R})$, то есть удовлетворяет фрейм-неравенству

$$A\|f\|_2^2\leqslant\sum_{m,n}|(f,\pi_{\alpha n,\beta m}g)|^2\leqslant B\|f\|_2^2,\quad f\in L^2(\mathbb{R}). \tag{1}$$

В таком случае система $\{\pi_{x,w}g\}_{(x,w)\in\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}}$ называется фреймом, а основным вопросом анализа Габора является описание фрейм-множества $\mathcal{F}_g$ таких (α,β), что система — фрейм.

Заметим отдельно, что человечество знает о фрейм-множествах достаточно мало даже для хороших типов функций $g(t)$: например, до 2011 года полные ответы были известны только для гауссиана e^{-x^2}, односторонней $\chi_{x>0}e^{-x}$ и симметричной $e^{-|x|}$ экспонент, а также для гиперболического секанта $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ — полный обзор известных результатов можно посмотреть во введении в статье [3].

Результаты

В статье [3] мною в соавторстве с Ю. Беловым были получены следующие результаты: для функции

$$g(t)=\frac{1}{t-iw}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k e^{2\pi i b_k t}\right),\ \text{где}\ \sum_k |a_k|<\infty,\quad b_k,w\in\mathbb{R}$$

было показано, что ее фрейм-множество максимально после наложения некоторых естественных условий на коэффициенты. Условимся, что $w<0$, $a_0=1, b_0=0$, и $b_k>0$ для $k\geqslant 1$. Тогда

Теорема 5. *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|e^{2\pi|w|b_k}<1$, *то* $\mathcal{F}_g=\{(\alpha,\beta)\mid \alpha\beta\leqslant 1\}$.

Техника доказательства этого результата позволила в той же статье решить давнюю проблему отыскания фрейм-множества сдвинутой sinc-функции.

Теорема 6. *Пусть*

$$g(t)=\frac{\sin\pi b(t-iw)}{t-iw},\quad b>0, w<0.$$

Тогда $\mathcal{F}_g=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha\beta\leqslant 1,\beta\leqslant b\}$.

5. Опубликованные и поданные в печать работы

В 2023 году мною были написаны представленные ниже работы:

[3] Yu. Belov and Andrei V. Semenov, *Frame set of shifted sinc-function*, препринт, `https://arxiv.org/pdf/2309.05969.pdf` — послана в журнал Applied and Computational Harmonic Analysis.

[4] Andrei V. Semenov, *Gabor frames on irregular lattices*, pdf-версия в работе.

В статье [3] есть благодарность гранту «Молодая математика России».

Также были приняты в журналы следующие написанные в прошлом году статьи (в каждом из которых есть благодарность гранту «Молодая математика России»):

[2] Viktor A. Petrov, Andrei V. Semenov, *Geometry of symmetric spaces of type EVI*, принято к публикации в журнале Journal of Algebra, ссылка `https://arxiv.org/abs/2208.13730`

[5] Alexander Generalov and Andrei V. Semenov, *BV-structure on Hochschild cohomology for exceptional local algebras of quaternion type. Case of even parameter*, принята к публикации в журнале «Алгебра и анализ», ссылка `https://arxiv.org/abs/2109.01814`

6. Участие в конференциях и школах

В 2023 году я участвовал в следующих конференциях и школах:

1. Сентябрь 2023: «Конференция по анализу и приложениям (КАиП)», Красноярск, с докладом «Фрейм-множество сдвинутой sinc-функции»;

2. Октябрь 2023: конференция «Дни анализа в Сириусе 2023», Сочи, с докладом «Фреймы Габора на нерегулярных решетках».

7. Работа в научных центрах и международных группах

С 2023 я являюсь постдоком в Международном Математическом Центре им. Эйлера. Хост: профессор Юрий Белов.

8. Педагогическая деятельность

С 2022 года веду практические занятия по математическому анализу у 1-2 курсов факультета МКН СПбГУ, а также практические занятия по алгебре у 1-2 курсов факультета МКН СПбГУ.
С сентября 2023 года я также осуществляю научное руководство двух студентов-второкурсников факультета МКН СПбГУ (Илья Ширинговский и Вадим Кузнецов).