Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2022 год

Станислав Валерьевич Шапошников

Полученные результаты

В 2022 году исследовались качественные свойства решений дважды дивергентных эллиптических уравнений и связь вероятностных решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с решениями мартингальной задачи.

Дважды дивергентным эллиптическим уравнением называют уравнение вида

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}\varrho\bigr) - \partial_{x_i}\bigl(b^i\varrho\bigr) = 0 \tag{1}$$

на области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Коэффициенты a^{ij}, b^i измеримы, матрица $A = (a^{ij})$ симметрична и неотрицательно определена, а функция $\varrho \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Важным примером уравнения такого вида является стационарное уравнение Колмогорова для инвариантной меры диффузионного процесса. Кроме того, исследование свойств функций Грина для эллиптических операторов второго порядка приводит к изучению решений дважды дивергентных эллиптических уравнений. Отметим, что свойства решений таких уравнений существенно отличаются от свойств решений классических эллиптических уравнений с частными производными второго порядка. Это хорошо видно уже в одномерном случае. Все решения уравнения $(a\varrho)'' = 0$, где $a(x) \geq a_0 > 0$, имеют вид $(c_1x+c_2)/a(x)$. Если a — непрерывная и нигде не дифференцируемая функция, то отличное от нуля решение является лишь непрерывным и не имеет классических или соболевских производных. Кроме того, согласно известному примеру П. Бауман, в многомерном случае решение уравнения $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}\varrho\bigr) = 0$ с положительно определенной непрерывной матрицей A может не быть даже локально ограниченным. Отметим, что в случае непрерывной матрицы A решение локально интегрируемо в произвольной степени. Если модуль непрерывности матрицы A удовлетворяет условию Дини, то всякое решение имеет непрерывную версию. Важной задачей является исследование зависимости интегрируемости решения от модуля непрерывности матрицы A. В работах [1] и [2] получен следующий результат.

Предположим, что $b \in L^p_{loc}(\Omega)$ и

$$\lambda \cdot I \leq A \leq \lambda^{-1} \cdot I, \quad \|A(x) - A(y)\| \leq \omega(|x-y|) \quad \forall x, y \in \Omega,$$

где ω — неотрицательная, монотонная и непрерывная функция на $[0, +\infty)$, причем $\omega(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $B \subset \Omega$ — замкнутый шар.*

(i) *Если $\lim\limits_{t\to 0+} \omega(t)|\ln t| = 0$, то для всех $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ выполнено*

$$\exp(\gamma_1|\varrho|^{\gamma_2}) \in L^1(B).$$

(ii) *Если функция $\omega(t)|\ln t|$ ограничена на $(0, 1]$, то найдутся такие $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, что*

$$\exp(\gamma_1|\varrho|^{\gamma_2}) \in L^1(B).$$

(iii) *Если для некоторого $0 < \beta < 1$ функция $\omega(t)|\ln t|^{\beta}$ ограничена на $(0, 1]$, то найдется такое число $\gamma > 0$, что*

$$\exp\bigl(\gamma\bigl|\ln(|\varrho| + 1)\bigr|^{\frac{1}{1-\beta}}\bigr) \in L^1(B).$$

Таким образом, чем ближе ограничения на модуль непрерывности к условию Дини, тем лучше интегрируемо решение. Отметим, что ранее для непрерывной матрицы A было известно лишь, что всякое решение интегрируемо в произвольной степени.

Напомним, что в случае, когда матрица A удовлетворяет условию Дини, то решение имеет непрерывную версию. Важной задачей является получение неравенства Харнака, которое обеспечивает положительность неотрицательных непрерывных решений и позволяет исследовать поведение решений на бесконечности. В работах [1] и [2] неравенство Харнака установлено в случае, когда матрица A удовлетворяет условию Дини, а коэффициент b интегрируем в достаточно высокой степени.

Теорема 2. *Предположим, что сформулированные выше условия на b и A выполнены, причем модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Тогда для непрерывной версии неотрицательного решения ϱ справедливо неравенство Харнака, то есть для всякого шара $B(x_0, R/2) \subset B(x_0, 4R) \subset \Omega$ существует такое число C, что

$$\sup_{x\in B(x_0,R/2)} \varrho(x) \le C \inf_{x\in B(x_0,R/2)} \varrho(x),$$

где C зависит от R, ω, d, λ, p и $\|b\|_{L^p(B(x_0,4R))}$, но не зависит от ϱ.

Отметим, что ранее неравенство Харнака для решений дважды дивергентных эллиптических уравнений было известно лишь для ограниченных b, причем условие ограниченности b существенно использовалось в доказательстве.

Для обоснования приведенных выше результатов был разработан новый подход, основанный на применении специальной замены координат, которая в теории диффузионных процессов называется преобразованием Звонкина и ранее использовалась для исследования стохастических уравнений с нерегулярными коэффициентами. Оказалось, что данную замену в очень общей ситуации можно применить напрямую к дважды дивергентным эллиптическим уравнениям. Это позволило существенно сократить доказательства уже известных результатов об интегрируемости и непрерывности решений, получить неравенство Харнака в случае лишь интегрируемого коэффициента b и существенно усилить известную теорему Хасьминского о существовании вероятностного решения уравнения Колмогорова.

Связь вероятностных решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с решениями мартингальной задачи в наиболее общем виде выражается в принципе суперпозиции Амброзио–Фигалли–Тревизана.

Будем говорить, что для решения $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$, где μ_t — семейство вероятностных мер (то есть $\mu_t \ge 0$ и $\mu_t(\mathbb{R}^d) = 1$), уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = \partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}\mu_t\bigr) - \partial_{x_i}\bigl(b^i\mu_t\bigr) \tag{2}$$

справедлив *принцип суперпозиции*, если существует такая вероятностная борелевская мера P на пространстве непрерывных кривых $C([0,T], \mathbb{R}^d)$, что для всякого

$t \in [0,T]$ верно равенство $P \circ e_t^{-1} = \mu_t$, где $e_t(\omega(\,\cdot\,)) = \omega(t)$, и для всякой функции $\varphi \in C_0^2(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$(t,\omega) \mapsto \varphi(\omega(t)) - \varphi(\omega(0)) - \int_0^t L\varphi(s,\omega(s))\,ds,$$

где

$$Lu = \mathrm{tr}\bigl(AD^2u\bigr) + \langle b, Du\rangle,$$

является мартингалом относительно меры P и фильтрации $\mathcal{F}_t = \sigma\bigl(\omega(s), s \in [0,t]\bigr)$. Отметим, что только локальных условий на A, b и $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ недостаточно для выполнения принципа суперпозиции. В случае нулевой матрицы A принцип суперпозиции был получен Л. Амброзио в предположении, что функция $|b(t,x)|(1+|x|)^{-1}$ принадлежит $L^1(\mu_t dt)$. А. Фигалли обосновал принцип суперпозиции в случае ограниченных коэффициентов, а Д. Тревизан показал, что для выполнения принципа суперпозиции достаточно условия $\|A(t,x)\|$, $|b(t,x)| \in L^1(\mu_t dt)$. Наконец, в недавней работе В. И. Богачева, М. Рёкнера и С. В. Шапошникова показано, что условие

$$\int_0^T \int \frac{\|A(t,x)\| + |\langle b(t,x), x\rangle|}{1+|x|^2}\,\mu_t(dx)\,dt < \infty$$

влечет принцип суперпозиции. Более того, если $\ln(1+|x|) \in L^1(\mu_0)$ и

$$\|A(t,x)\| \le C + C|x|^2\ln(1+|x|), \quad \langle b(t,x), x\rangle \le C + C|x|^2\ln(1+|x|),$$

то для решения μ_t справедлив принцип суперпозиции.

Перечисленные условия гарантируют, что порождаемый оператором L случайный процесс с одномерными распределениями $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$, с вероятностью единица не уходит в бесконечность за время, меньшее T. Классическим условием для этого является существование функции Ляпунова:

$$V \in C^2(\mathbb{R}^d), \quad \lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad LV \le C + CV.$$

Неизвестно, является ли существование функции Ляпунова достаточным условием для выполнения принципа суперпозиции. В перечисленных выше результатах фактически рассмотрен случай радиальной функции Ляпунова, причем это существенно используется в доказательстве.

В работе [3] предложен новый подход, основанный на построении специальной замены координат. С помощью замены координат удается избавиться от растущей на бесконечности части коэффициента сноса, не предполагая при этом дополнительной локальной регулярности коэффициента диффузии и оставшейся части сноса.

Теорема 3. *Предположим, что a^{ij}, B^i ограничены и имеют компактный носитель. Пусть*

$$b(t,x) = \beta(x) + B(t,x),$$

где $\beta^i \in C^2(\mathbb{R}^d)$, причем существуют функция $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$ и число $C \ge 0$ такие, что

$$\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty, \quad V(x) \ge 1, \quad \langle \beta(x), \nabla V(x)\rangle \le C \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда для всякого решения $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ уравнения (2), которое является непрерывной кривой в пространстве вероятностных мер, справедлив принцип суперпозиции.

Отметим, что это новый результат, который не является следствием ранее известных достаточных условий. Не предполагается интегрируемость функций $|\beta(x)|$ или $\langle\beta(x), x\rangle/(1+|x|^2)$, а требуется лишь существование функции Ляпунова, которая не обязана быть радиальной.

Поскольку мы строим замену координат, преобразующую неограниченную на бесконечности часть коэффициента сноса, после замены полоса $(0, T) \times \mathbb{R}^d$ может перейти в некоторую ограниченную область. Поэтому значительная часть работы [3] посвящена уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова на области.

Кроме перечисленных выше задач изучались нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с локальной и нелокальной нелинейностью. Получены достаточные условия существования, единственности и сходимости решений параболического уравнения к стационарному решению. Подготовлена к публикации статья.

Опубликованные работы

1. V. I. Bogachev, M. Röckner, S. V. Shaposhnikov, Zvonkin's transform and the regularity of solutions to double divergence form elliptic equations, Communications in Partial Differential Equations, 2022, С.1–31.

DOI: 10.1080/03605302.2022.2139724 (см. arXiv:2203.01000)

2. В. И. Богачев, М. Рёкнер, С. В. Шапошников, Применение преобразования Звонкина к стационарным уравнениям Колмогорова, Доклады РАН, математика, информатика и процессы управления, 2022, Т.506, С.20–24.

3. Т. И. Красовицкий, С. В. Шапошников, Принцип суперпозиции для уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с неограниченными коэффициентами, Функциональный анализ и его приложения, 2022, Т.56, В.4, С.59–79.

DOI: https://doi.org/10.4213/faa4035

Участие в конференциях, школах и семинарах

1. Цикл из трех лекций «Кривые в пространстве вероятностных мер» на математической студенческой школе СПбГУ — ВШЭ 05.04.2022–09.04.2021, СПбГУ.

2. Доклад «Регулярность решений стационарного уравнения Колмогорова», городской семинар по теории вероятностей и математической статистике 15 апреля 2022, Санкт–Петербург, ПОМИ

3. Цикл из трех лекций «Нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова» на международной конференции: VII школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (НЛА 2022), 15.07.2022–22.07.2022, Иркутск

4. Доклад «On the Kolmogorov equations with coefficients of low regularity» на международной конференции «O.A.Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's» 16.07.2022–22.07.2022, Euler International Mathematical Institute, St.Petersburg, Russia.

5. Цикл из четырёх лекций «Принцип суперпозиции для вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова» на 3-й международной летней школе по финансовой математике. Институт ВЕГА, 21.08.2022–28.08.2022, г.Пушкин, Санкт-Петербург.

6. Доклад «О единственности решений уравнений Колмогорова», городской семинар по математической физике им. В.И.Смирнова 19 сентября 2022, Санкт–Петербург, ПОМИ

7. Доклад «The superposition principle for Fokker–Planck–Kolmogorov equations» на международной конференции «International Probability Conference dedicated to the 90th birthday of Ildar Ibragimov» 30.09.2022–02.10.2022, Euler International Mathematical Institute, St.Petersburg, Russia.

Работа в научных центрах и международных группах

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
МГУ имени М.В.Ломоносова, руководитель научной группы.

Педагогическая деятельность

Обязательные курсы

Курс «Математический анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна и осень 2022 года, лекции.

Курс «Функциоанальный анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна и осень 2022 года, семинары.

Курс «Действительный анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна 2022 года, семинары.

Курс «Математический анализ», Независимый Московский Университет, осень 2022 года, лекции и семинары.

Курс «Уравнения с частными производными», математический факультет, НИУ ВШЭ, весна 2022 года, лекции и семинары.

Курс «Введение в функциональный анализ», математический факультет, НИУ ВШЭ, осень 2022 года, лекции и семинары.

Курс «Математический анализ», физический факультет, НИУ ВШЭ, осень 2022 года, лекции и семинары.

Специальные курсы

Курс «Геометрия и анализ в пространстве вероятностных мер» (специальный курс) Независимый Московский Университет, весна 2022 года, лекции.

Курс «Игры среднего поля» (специальный курс), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна 2022 года, лекции и семинары.

Курс «Нелинейные уравнения с частными производными, вязкостные решения» (специальный курс), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, осень 2022 года, лекции и семинары.