Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2023 год
Станислав Валерьевич Шапошников

Полученные результаты

В 2023 году проводились исследования по следующим направлениям: 1) нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, 2) стационарные уравнения Колмогорова с частично вырожденной матрицей диффузии, 3) зависимость решений от коэффициентов и восстановление коэффициентов по решениям уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. В каждом из направлений получены новые результаты, на некоторых из них остановимся подробнее.

1) Рассмотрим нелинейное уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова

$$\partial_t \varrho_t(x) = \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}(x)\varrho_t(x)\bigr) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\bigl(\varrho_t(x) b^i(x, \varrho_t(x), \varrho_t)\bigr), \tag{1}$$

где матрица диффузии $A(x) = (a^{ij}(x))$ симметрична, ограничена, невырождена и липшицева, а коэффициент сноса $b = (b^i)$ зависит от x, значения решения $\varrho_t(x)$ в точке x и меры с плотностью ϱ_t относительно меры Лебега. Типичным примером является коэффициент сноса b, заданный формулой

$$b(x, u, \varrho) = b_0(x) + u^\nu b_1(x) + u^\kappa \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y)\varrho(y)\, dy, \quad \nu, \kappa > 0.$$

Вместе с параболическим уравнением мы исследуем стационарное уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}(x)\varrho(x)\bigr) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\bigl(\varrho(x) b^i(x, \varrho(x), \varrho)\bigr) = 0. \tag{2}$$

Основные результаты состоят в следующем: существует такое число $M_0 > 0$, что для всякого $M \in (0, M_0)$

i) стационарное уравнение (2) имеет положительное непрерывное решение ϱ, интеграл которого по $\mathbb{R}^d$ равен M, причем такое решение в определенном смысле единственно,

ii) для достаточно «малых» начальных условий задача Коши для параболического уравнения (1) имеет положительное и непрерывное на $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ решение ϱ_t, интеграл которого по $\mathbb{R}^d$ при каждом $t > 0$ равен M, причем такое решение в определенном смысле единственно,

iii) существуют такие положительные константы C_1 и C_2, что для некоторого $k \ge 1$ верна оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bigl|\varrho_t(x) - \varrho(x)\bigr|(1 + |x|^k)\, dx \le C_1 e^{-C_2 t}, \quad t > 0,$$

то есть имеет место экспоненциальная по времени сходимость к стационарному решению.

Исследованию нелинейных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова посвящено большое число работ, что связано с многочисленными приложениями в физике и биологии, в социальных и экономических науках. Построение и обсуждение моделей на основе уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова можно, например, найти в монографии Frank T. D., Nonlinear Fokker–Planck Equations: Fundamentals and Applications.

Новизна полученных результатов состоит в том, что рассматривается трудный случай, когда коэффициент сноса может включать локальные и нелокальные нелинейные члены, но специальных структурных предположений о виде коэффициентов нет. Это затрудняет применение энтропии для обоснования сходимости к стационарному распределению, которое к тому же в общем случае нельзя выписать явно. Также затруднительно применять классические методы, основанные на нелинейных полугруппах или градиентных потоках. Отметим, что коэффициенты не предполагаются гладкими и допускается их значительный рост на бесконечности.

2) Рассмотрим линейное стационарное уравнение Колмогорова

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\big(a^{ij}\mu\big) - \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\big(b^i\mu\big) = 0. \tag{3}$$

Положим

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{d} a^{ij}\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^{d} b^i\partial_{x_i}u.$$

Решение μ — конечная борелевская мера. Неотрицательное решение μ, для которого верно равенство $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$, называется вероятностным.

Существованию вероятностного решения уравнения Колмогорова посвящена известная теорема Хасьминского Р.З., обобщения которой на случай вырожденных и негладких коэффициентов получены в работах Богачева В.И., Рёкнера М., H. Lee, G. Trutnau. Интерес именно к вероятностным решениям связан с тем, что инвариантная мера диффузионного процесса с генератором L удовлетворяет уравнению Колмогорова. Более того, согласно принципу суперпозиции в весьма общей ситуации каждому вероятностному решению μ соответствует такая мера P на $C([0,+\infty),\mathbb{R}^d)$, что P является решением мартингальной задачи с оператором L и для всех $t \ge 0$ верно равенство $P(\omega\colon \omega(t) \in B) = \mu(B)$. Наконец, существование вероятностного решения позволяет в случае нерегулярных и растущих на бесконечности коэффициентов построить субмарковскую полугруппу с генератором L. Классическим глобальным условием теоремы Хасьминского является существование функции Ляпунова, то есть такой функции $V \in C^2(\mathbb{R}^d)$, что $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$ и для некоторых положительных чисел $R > 0$ и $C > 0$ неравенство $LV(x) \le -C$ справедливо при $|x| > R$. Однако без дополнительных локальных условий на коэффициенты наличие функции Ляпунова еще не гарантирует существование вероятностного решения. В известных вариантах теоремы Хасьминского можно выделить три вида локальных условий: a) коэффициенты a^{ij} и b^i непрерывны, b) на каждом шаре B коэффициенты a^{ij} и b^i ограничены и для некоторого числа $\lambda_B > 0$ выполнено $A \ge \lambda_B \cdot I$, c) на каждом шаре B функции a^{ij} непрерывны (или удовлетворяют условию VMO), $|b| \in L^{p_B}(B)$ для некоторого $p_B > d$ и справедливо неравенство $A \ge \lambda_B \cdot I$ для некоторого $\lambda_B > 0$ Отметим, что, в отличие от пунктов b) и c), в пункте a) не предполагается невырожденность матрицы A, но, в отличие от пункта a), в пунктах b) и c) не предполагается непрерывность коэффициента b. Представляет интерес обобщение теоремы Хасьминского на промежуточный случай, когда матрица A вырождена лишь по части переменных.

Типичный пример доставляет оператор

$$Lu(x)=\sum_{i=1}^{m}\partial^2_{x_i}u(x)+\sum_{i=1}^{d}b^i(x)\partial_{x_i}u(x),\quad 1\le m\le d,$$

который появляется при исследовании стохастических уравнений, когда по части переменных диффузионный процесс описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а по остальным переменным — стохастическими дифференциальными уравнениями. Таковой является система стохастических уравнений Ланжевена

$$dZ_t=Y_t\,dt,\quad dY_t=B(Y_t,Z_t)\,dt+\sqrt{2}\,dW_t,$$

где W_t — винеровский процесс. Соответствующий оператор L имеет вид

$$Lu(y,z)=\partial^2_y u(y,z)+y\partial_z u(y,z)+B(y,z)\partial_y u(y,z).$$

Стохастические уравнения с частично вырожденной матрицей диффузии исследовались в работах Веретенникова А.Ю., Левакова А.А., Васьковского М.М. и др. В этих работах было показано, что требования регулярности коэффициентов по переменным, по которым нет вырождения матрицы диффузии, можно ослабить. Естественно предположить, что в случае стационарного уравнения Колмогорова ситуация аналогична, и в теореме Хасьминского по переменным, по которым нет вырождения, можно не требовать непрерывности коэффициентов уравнения, а накладывать условия из пунктов b) и c). Основной результат состоит в обосновании этого предположения. В качестве вспомогательного результата доказано существование плотности у проекции решения на координаты, по которым нет вырождения, а также получена оценка плотности через коэффициенты уравнения. Более того, построены примеры, показывающие точность полученных условий.

Для удобства выделим переменные, по которым соответствующий минор матрицы диффузии не вырождается. Пусть $1\le m\le d$, $\mathbb{R}^d_x=\mathbb{R}^m_y\times\mathbb{R}^{d-m}_z$ и $x=(y,z)$. В основных результатах мы будем использовать следующие предположения о коэффициентах.

($\mathrm{H_a}$) для каждого куба $K\subset\mathbb{R}^d$ существует такая константа $\lambda_K>0$, что неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m}a^{ij}(x)\xi_i\xi_j\ge\lambda_K|\xi|^2$$

справедливо для всех $x\in K$ и $\xi\in\mathbb{R}^m$.

($\mathrm{H_b}$) для всякого куба $K=K_y\times K_z$, где $K_y\subset\mathbb{R}^m_y$, $K_z\subset\mathbb{R}^{d-m}_z$, существуют такие положительное число C_K и непрерывная неотрицательная монотонная функция ω_K на луче $[0,+\infty)$, что $\omega_K(0)=0$ и неравенства

$$\bigl|a^{ij}(y,z)-a^{ij}(y,z')\bigr|+\bigl|b^i(y,z)-b^i(y,z')\bigr|\le\omega_K(|z-z'|),\quad \bigl|a^{ij}(y,0)\bigr|+\bigl|b^i(y,0)\bigr|\le C_K$$

справедливы для всех i,j и всех $y\in K_y$, $z,z'\in K_z$.

($\mathrm{H_c}$) функции a^{ij} непрерывны, при $i,j\le m$ функции a^{ij} зависят только от $y\in\mathbb{R}^m_y$ и для всякого куба $K=K_y\times K_z$, где $K_y\subset\mathbb{R}^m_y$, $K_z\subset\mathbb{R}^{d-m}_z$, существуют такие числа $p_K>d$, $C_K>0$, измеримые неотрицательные функции $g^i\in L^{p_K}(K_y)$, $i\le m$, и непрерывная неотрицательная монотонная функция ω_K на $[0,+\infty)$, что $\omega_K(0)=0$ и для всех $y\in K_y$, $z,z'\in K_z$ справедливы неравенства

$$\bigl|b^i(y,z)-b^i(y,z')\bigr|\le g^i(y)\omega_K(|z-z'|),\quad \bigl|b^i(y,0)\bigr|\le g^i(y)\quad \text{при}\quad i\le m,$$
$$\bigl|b^i(y,z)-b^i(y,z')\bigr|\le \omega_K(|z-z'|),\quad \bigl|b^i(y,0)\bigr|\le C_K\quad \text{при}\quad i> m.$$

Следующая теорема является основным результатом.

Теорема 1. *Пусть выполнены условие* $(\mathrm{H_a})$ *и одно из условий* $(\mathrm{H_b})$ *или* $(\mathrm{H_c})$ *. Предположим, что существуют такие функция* $V\in C^2(\mathbb{R}^d)$ *и числа* $C>0$, $R>0$, *что* $\lim_{|x|\to+\infty}V(x)=+\infty$ *и* $LV(x)\le -C$ *при* $|x|>R$. *Тогда уравнение Колмогорова* (3) *имеет вероятностное решение.*

3) Рассмотрим линейное параболическое уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\partial_t\mu_t=\sum_{i,j=1}^d\partial_{x_i}\partial_{x_j}\bigl(a^{ij}\mu\bigr)-\sum_{i=1}^d\partial_{x_i}\bigl(b^i\mu\bigr). \tag{4}$$

Коэффициенты a^{ij} и b^i являются борелевскими функциями, а матрица $A=(a^{ij})$ симметрична и неотрицательно определена. Решение $(\mu_t)_{t\in[\tau,T]}$ — непрерывная кривая в пространстве вероятностных мер со слабой топологией. В случае гладких и ограниченных коэффициентов несложно проверить, что справедливы равенства

$$b^i(x,\tau)=\lim_{h\to0}\frac1h\int_{\mathbb{R}^d}(y_i-x_i)\mu_{\tau+h,x}(dy),\quad a^{ij}(x,\tau)=\lim_{h\to0}\frac1{2h}\int_{\mathbb{R}^d}(y_i-x_i)(y_j-x_j)\mu_{\tau+h,x}(dy),$$

где $\mu_{t,x}$ — решение уравнения (4) с начальным условием δ_x при $t=\tau$.

Предположим теперь, что коэффициенты a^{ij} и b^i не являются даже непрерывными и известно лишь существование одного решения (μ_t). Можно ли восстановить коэффициенты в этой очень общей ситуации? Ясно, что по одному решению (μ_t) невозможно восстановить коэффициенты уравнения, но оказывается с помощью одного решения можно сгенерировать семейство решений, которого уже хватает для восстановления коэффициентов. Отметим, что поточечное восстановление коэффициентов в общем случае теряет смысл, так как изменение коэффициентов на множестве нулевой меры не влияет на решения уравнения. Ключом к восстановлению коэффициентов в общем случае является принцип суперпозиции.

Итак, пусть (μ_t) — решение уравнения (4) на $[\tau,T]$. Будем говорить, что борелевская функция f на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$ аппроксимируема относительно (μ_t) на $[\tau,T]$, если существует такая последовательность ограниченных борелевских функций f_n на $\mathbb{R}^d\times[\tau,T]$, что эти функции непрерывны по x, для всякого шара B выполнено

$$\lim_{t\to\tau+0}\sup_B|f_n(x,t)-f_n(x,\tau)|=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{essup}_{s\in[\tau,T]}\|f(\,\cdot\,,s)-f_n(\,\cdot\,,s)\|_{L^1(\mu_s)}=0.$$

Найдется такое множество $S\subset[\tau,T]$ полной меры Лебега, что $\tau\in S$ и для каждого $s\in S$ последовательность функций $f_n(\,\cdot\,,s)$ сходится в $L^1(\mu_s)$ к некоторой функции $\widetilde f(\,\cdot\,,s)$, которая является версией функции f на $[\tau,T]\times\mathbb{R}^d$ и играет важную роль в формулировке основного результата. Ясно, что всякая непрерывная функция f является аппроксимируемой. Если для почти всех t мера μ_t имеет плотность $\varrho(\,\cdot\,,t)$

относительно меры Лебега, причем на всяком шаре функции $\varrho(\,\cdot\,,t)$ равномерно интегрируемы, то аппроксимируемой является всякая ограниченная измеримая функция f, зависящая только от x.

По принципу суперпозиции существует такая вероятностная мера P на $C([\tau,T],\mathbb{R}^d)$, что $\mu_t = P\circ e_t^{-1}$, где $e_t(\omega)=\omega(t)$, и для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ отображение

$$(t,\omega)\to\varphi(\omega(t))-\varphi(\omega(0))-\int_0^t L\varphi(\omega(s),s)\,ds$$

является мартингалом относительно меры P и фильтрации $\mathcal{F}_t=\sigma(\omega(s),s\in[\tau,t])$. Пусть P^x — условные меры, получающиеся при дезинтегрировании меры P относительно меры μ_τ. Можно проверить, что $\mu_t^x = P^x\circ e_t^{-1}$ является решением уравнения (4) с начальным условием δ_x при $t=\tau$. Имеет место следующий результат о восстановлении коэффициентов.

Теорема 2. *Предположим, что $|a^{ij}|,(1+|x|)|b^i|\in L^1(\mu_t\,dt)$, для каждого t функция $|x|^2$ интегрируема относительно μ_t и функции a^{ij}, b^i и x_jb^i аппроксимируемы относительно (μ_t) на $[\tau,T]$. Тогда по мере μ_τ*

$$\widetilde{b}^i(x,\tau)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^d}(y_i-x_i)\mu^x_{\tau+h}(dy),\quad \widetilde{a}^{ij}(x,\tau)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{\mathbb{R}^d}(y_i-x_i)(y_j-x_j)\mu^x_{\tau+h}(dy),$$

Отметим, что кроме перечисленных результатов исследовалась измеримость решений по параметру, от которого зависят коэффициенты уравнения.

Опубликованные, принятые к публикации и отправленные в журнал работы

1. Богачев В.И., Рёкнер М., Шапошников С.В. Задачи Колмогорова об уравнениях для стационарных и переходных вероятностей диффузионных процессов. Теория вероятностей и ее применения. 2023. Т 68, N 3, C. 420-255.

2. Богачев В.И., Шапошников С.В. Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с параметром. Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 513, С. 20–25.

3. Шапошников С.В., Шатилович Д.В. Теорема Хасьминского для уравнения Колмогорова с частично вырожденной матрицей диффузии. Математические заметки. 2024. (принята к публикации)

4. Богачев В.И., Салахов Д.И., Шапошников С.В. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова с нелинейными членами локального и нелокального вида. Алгебра и Анализ. 2024. (принята к публикации)

5. Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V. On reconstruction of coefficients of Fokker–Planck–Kolmogorov equations by solutions. 2023. (отправлена в журнал)

Участие в конференциях, школах и семинарах

1. Приглашенный доклад «Nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations» на международной конференции «Trends in Partial Differential Equations. The conference is dedicated to the 90 th birthday of outstanding mathematician Vsevolod A. Solonnikov.» Санкт-Петербург, 9-10 июня 2023 г.

2. Секционный доклад «Замена координат в уравнении Колмогорова» на всероссийской конференции «Третья конференция математических центров России» Майкоп, 10-15 октября 2023 г.

3. Приглашенный доклад «Nonlinear Fokker–Planck–Kolmogorov equations» на международной конференции «LSA Winter Meeting in Voronovo - 2023» Москва, 20-24 ноября 2023г.

4. Доклад «On the superposition principle for probability solutions to Fokker-Planck-Kolmogorov equations» на совместном Китайско–Русском математическом коллоквиуме 5 мая 2023 г.

5. Доклад

«Принцип суперпозиции для решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова» на семинаре «Вопросы математического моделирования критических явлений» под руководством Радкевича Е.В., Стёпина С.А., Боровских А.В., Палина В.В. 31 марта 2023 г.

6. Лекция «Кривая Пеано» для школьников на лектории механико–математического факультета МГУ, 10 мая 2023 г.

7. Лекции «Теорема Шаля» и «Инверсия» для школьников на летней математической школе классов при механико–математическом факультете МГУ, 3 июля 2023 г.

Работа в научных центрах и международных группах

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
МГУ имени М.В.Ломоносова, руководитель научной группы.

Педагогическая деятельность

Обязательные курсы

Курс «Математический анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, осень 2023 года, лекции.

Курс «Функциоанальный анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна и осень 2023 года, семинары.

Курс «Действительный анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна 2023 года, семинары.

Курс «Теория вероятностей», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна 2023 года, семинары.

Курс «Математический анализ», Независимый Московский Университет, весна 2023 года, лекции и семинары.

Курс «Анализ на многообразиях», Независимый Московский Университет, осень 2023 года, лекции и семинары.

Курс «Уравнения с частными производными», факультет компьютерных наук, НИУ ВШЭ, весна 2023 года, лекции.

Курс «Введение в функциональный анализ», математический факультет, НИУ ВШЭ, осень 2023 года, лекции и семинары.

Курс «Математический анализ-2», НИУ ВШЭ — РЭШ, осень 2023 года, лекции.

Специальные курсы

Курс «Грубые траектории» (специальный курс), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна 2023 года, лекции и семинары.

Курс «Нелинейные уравнения с частными производными, вязкостные решения» (специальный курс), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, осень 2023 года, лекции и семинары.

Итоги трех лет

Согласно плану исследований планировалось получить результаты по следующим направлениям: регулярность решений уравнений Колмогорова, принцип суперпозиции для вероятностных решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова, нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. По каждому из направлений получены существенные продвижения. Опубликовано 10 работ в ведущих математических журналах.

Предложен новый подход к исследованию регулярности решений уравнений Колмогорова, основанный на преобразовании Звонкина. Это подход позволил существенно упростить доказательство уже известных ранее результатов, обосновать неравенство Харнака в случае неограниченного коэффициента сноса (что долгое время оставалось открытой проблемой), исследовать зависимость интегрируемости плотности решения от свойств модуля непрерывности матрицы диффузии. Полученные результаты позволили получить новые достаточные условиям существования и единственности вероятностных решений. Однако остался открытым вопрос о положительности плотности решения, когда матрица диффузии непрерывна по Гёльдеру, а коэффициент сноса экспоненциально интегрируем относительно решения. Трудность состоит в том, что преобразование Звонкина требует регулярности коэффициентов относительно меры Лебега и не может быть применено в этой ситуации.

Принцип суперпозиции устанавливает при широких условиях на коэффициенты связь между вероятностными решениями уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и решениями соответствующей мартингальной задачи. Справедливость принципа суперпозиции зависит от поведения коэффициентов на бесконечности. Остается открытым вопрос о выполнении принципа суперпозиции при условии существования функции Ляпунова. С помощью замены переменных удалось получить новые результаты, которые фактически дают положительный ответ в случае, когда матрица диффузии равна нулю вне некоторого шара. Кроме того, получен принцип суперпозиции для решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова на произвольной области (ранее рассматривались лишь уравнения на всем пространстве). В связи с исследованием принципа суперпозиции были построены новые примеры уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова с бесконечномерным симплексом вероятностных решений.

Исследованы нелинейные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с нелинейными членами локального и нелокального вида. Получены достаточные условия существования и единственности стационарного решения, существования и единственности глобального по времени решения, экспоненциальной сходимости решений к стационарному решению. Отметим, что полученные условия не предполагают структурных ограничений на вид уравнения и позволяют рассматривать коэффициенты, имеющие существенный рост на бесконечности. Однако представляет интерес исследование нелинейных уравнений в случае, когда нелинейность присутствует не только в коэффициенте сноса, но и в матрице диффузии. Кроме того, плохо исследованы аналогичные вопросы для стохастических уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова.