Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2021 год

Станислав Валерьевич Шапошников

Полученные результаты

В 2021 году исследования проводились в двух направлениях: единственность вероятностных решений уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова и регулярность решений дважды дивергентных эллиптических уравнений.

По первому направлению исследований получены следующие результаты. Построен пример такого уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова с единичной матрицей диффузии и бесконечно гладким коэффициентом сноса, что задача Коши имеет бесконечно много линейно независимых вероятностных решений для каждого вероятностного начального условия. Отметим, что в ранее известных примерах начальное условие имело весьма специальный вид, который существенно использовался при построении различных вероятностных решений. Приведем точную формулировку результата, полученного в работе [1].

Пусть $d \geq 2$. Положим

$$b(x, y, z) = (B(x), C(y), D(z)), \tag{1}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{d-2}$ и

$$B(x) = -x - 6e^{x^2/2}, \quad C(y) = -(1+y^2)\operatorname{arctg} y + \frac{2y}{1+y^2}, \quad D(z) = -z.$$

Если $d = 2$, то компонента $D(z)$ отсутствует.

Теорема 1. *Пусть $b = (B, C, D)$ (или $b = (B, C)$ в случае $d = 2$). Тогда для всякой вероятностной меры ν задача Коши*

$$\partial_t \varrho = \Delta\varrho - \operatorname{div}\bigl(b\varrho\bigr), \quad \varrho|_{t=0} = \nu.$$

имеет бесконечно много линейно независимых вероятностных решений.

Таким образом, в размерности $d \geq 2$ для единственности вероятностного решения требуются дополнительные глобальные ограничения на коэффициенты. Однако в одномерном случае единственность имеет место без каких либо глобальных ограничений на коэффициент b. В работе [2] в одномерном случае получен следующий результат.

Теорема 2. *Для всякой вероятностной меры ν на $\mathbb{R}$ задача Коши*

$$\partial_t \varrho = \partial_x^2\varrho - \partial_x\bigl(b\varrho\bigr), \quad \varrho|_{t=0} = \nu.$$

с измеримым локально ограниченным коэффициентом сноса $b(x)$ имеет не более одного вероятностного решения.

Отметим, что в последней теореме нет ограничений на рост b или специальных предположений о поведении вероятностного решения на бесконечности. С учетом полученных ранее широких достаточных условий единственности вероятностных решений теорема 1 и теорема 2 в случае независящего от времени коэффициента сноса дают окончательное решение известной проблемы А.Н.Колмогорова о единственности вероятностных решений.

Вместе с проблемой единственности решений параболического уравнения исследовалась единственность вероятностного решения стационарного уравнения. В [3] исследовано стационарное уравнение Колмогорова

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\varrho)-\partial_{x_i}(b^i\varrho)=0$$

и показано, что в случае, когда матрица диффузии удовлетворяет условию Дини, а коэффициент сноса локально интегрируем в степени выше размерности, отношение двух вероятностных решений входит в класс Соболева, а при наличии функции Ляпунова или глобальной интегрируемости коэффициентов относительно решения вероятностное решение единственно. Отметим, что даже в одномерном случае функция ϱ может не иметь соболевской производной. Например, так будет, если $b=0$ и $A=1/\varrho$, причем $\varrho>0$ гёльдерова и недифференцируема. В полученных ранее результатах всегда предполагалась соболевость элементов матрицы диффузии и использовалась соболевость решений. Полученный результат существенно опирается на недавние работы Dong H., Kim S. и Escauriaza L., в которых исследовалась задача Дирихле для дважды дивергентного эллиптического уравнения с нерегулярными коэффициентами.

В работе [4] получены новые результаты о неединственности. Хорошо известно, что проблема единственности вероятностного решения уравнения

$$\Delta\varrho-\mathrm{div}\big(b\varrho\big)=0 \tag{2}$$

сводится к исследованию пространства решений вырождающегося на бесконечности эллиптического уравнения

$$\mathrm{div}\big(\varrho\nabla v-av\big)=0,\quad \mathrm{div}\,a=0. \tag{3}$$

Если ϱ — вероятностное решение уравнения (2) и v — неотрицательное непостоянное решение уравнения (3) из класса $L^1(\varrho\,dx)$, то правильно нормированная функция $v\varrho$ является вероятностным решением уравнения (2). Таким образом, представляет интерес изучение уравнения (3) в различных классах функций. Одним из самых простых и естественных классов является класс Соболева $W^{1,2}(\mu)$ по мере $\mu=\varrho\,dx$. В [4] получен следующий критерий существования непостоянного решения из этого класса.

Рассмотрим билинейную форму

$$[f,g]=\int_{\mathbb{R}^d}\langle a,\nabla f\rangle g\,dx.$$

Скажем, что $\varphi\in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условию (H), если

$$[\varphi,\psi]\le C(\varphi)\|\nabla\psi\|_{L^2(\mu)}\quad \forall\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d).$$

В этом случае функционал $\psi\to[\varphi,\psi]$ продолжается до непрерывного функционала на $W^{1,2}(\mu)$

Теорема 3. *Если для меры μ выполняется неравенство Пуанкаре, то уравнение*

$$\operatorname{div}\big(\varrho\nabla v - av\big) = 0$$

имеет непостоянное решение $v \in W^{1,2}(\mu)$ тогда и только тогда, когда для некоторой функции $\varphi \in W^{1,2}(\mu)$ выполнено условие (H) *и* $[\varphi, \varphi] < 0$. *Если дополнительно известно, что $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, то существует ограниченное непостоянное решение v.*

Получен критерий того, что пространство решений уравнения (3) имеет бесконечную размерность.

Исследовались качественные свойства решений дважды дивергентных эллиптических уравнений. Предложен новый подход к обоснованию гладкости и положительности решений, основанный на специальной замене координат, которая в теории диффузионных процессов называется преобразованием Звонкина. Удалось распространить неравенство Харнака для решений дважды дивергентных уравнений на случай, когда коэффициент сноса лишь интегрируем, а матрица диффузии удовлетворяет условию Дини в среднем. Известно, что непрерывность матрицы диффузии не является достаточным условием ограниченности решений. Исследована зависимость интегрируемости решения от вида модуля непрерывности матрицы диффузии. С помощью полученных результатов удалось существенно обобщить известные теоремы о существовании вероятностного решения стационарного уравнения Колмогорова на случай, когда элементы матрицы диффузии принадлежат классу VMO. Изучена связь построенных вероятностных решений с распределениями диффузионных процессов. Подготовлена к публикации статья.

Опубликованные работы

1. Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В. О неединственности вероятностных решений задачи Коши для уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Докдады РАН. 2021, Т. 498, С.16-20.

2. Богачев В.И., Красовицкий Т.И., Шапошников С.В. О единственности вероятностных решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Математический сборник. 2021, Т.212, N.6, С.3-42.

3. Bogachev V.I., Shaposhnikov S.V. Elliptic equations degenerating at infinity and uniqueness of probability solutions to the Kolmogorov equation. REVUE ROUMAINE DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES. 2021, V.66, N 1, P. 67-81.

4. Богачев В.И., Шапошников С.В. Единственность вероятностного решения уравнения Колмогорова с матрицей диффузии, удовлетворяющей условию Дини. Доклады РАН. 2022, Т 501.

5. Bogachev V.I., Roeckner M., Shaposhnikov S.V.On the Ambrosio–Figalli–Trevisan Superposition Principle for Probability Solutions to Fokker–Planck–Kolmogorov Equations. J. Dyn. Diff. Equat. 2021, V. 33, P.715–739 (нет ссылки на конкурс)

Участие в конференциях и школах

1. Приглашенный доклад на международной конференции

«Новые вызовы в современной теории вероятностей в пространствах высокой размерности и ее применениях в машинном обучении»

12.05.2021–16.05.2021, Сириус, Сочи.

2. Пленарный доклад на конференции международных математических центров мирового уровня, 09.08.2021—13.08.2021, Сириус, Сочи.

3. Приглашенный доклад на Всероссийском съезде учителей и преподавателей математики и информатики, посвященном 310-летию со дня рождения М.В.Ломоносова. 18.11.2021—19.11.2021, МГУ, Москва.

Работа в научных центрах и международных группах

Московский центр фундаментальной и прикладной математики,

МГУ имени М.В.Ломоносова, руководитель научной группы.

Педагогическая деятельность

Обязательные курсы

Курс «Математический анализ» (четвертый и первый семестр), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна и осень 2021 года, лекции.

Курс «Математический анализ» (второй и третий семестр), Независимый Московский Университет, весна и осень 2021 года, лекции.

Курс «Уравнения с частными производными», математический факультет, НИУ ВШЭ, весна 2021 года, лекции и семинары.

Курс «Математический анализ», Физический факультет, НИУ ВШЭ, осень 2021 года, лекции и семинары.

Курс «Функциоанальный анализ», механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна и осень 2021 года, семинары.

Специальные курсы

Курс «Качественная теория эллиптических уравнений» (специальный курс), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, весна 2021, года, лекции.

Курс «Вязкостные решения нелинейных уравнений с частными производными» (специальный курс), механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, осень 2021 года, лекции и семинары.