Отчет о научной и педагогической деятельности по гранту “Молодая математика России”

Р. В. Бессонов

Результаты, полученные в 2023г. Изучалось универсальное асимптотическое поведение воспроизводящих ядер, возникающих в теории случайных матриц. В этой области имеется множество работ, начиная с первых результатов Дейфта, с последующим развитием в статьях Любинского, Финдли, Тотика и др. и недавним фундаментальным результатом Лукича, Симанека, Эйхингера об универсальности в предположении лишь условия малости осцилляций меры в окрестности рассматриваемой точки.

Универсальность для воспроизводящих ядер заключается в следующем. Рассматривается мера Радона μ на вещественной оси или на единичной окружности. Пусть $\mathcal{P}_n$ – пространство многочленов степени не выше $n-1$ со скалярным произведением, наследованным из пространства $L^2(\mu)$ по этой мере. Зафиксируем точку z из носителя меры μ. Функционал значения в точке $z \mapsto p(z)$ непрерывен ($\mathcal{P}_n$ – конечномерное гильбертово пространство) и он порождает элемент $k_{\mu,n}(\cdot, z) \in \mathcal{P}_n$ такой, что $(p, k_{\mu,n}(\cdot, z)) = p(z)$, $p \in \mathcal{P}_n$. Этот элемент называется воспроизводящим ядром, отвечающем мере μ, точке z и параметру n. Оказывается, что при $|z_{1,2} - z| \lesssim 1/n$ и очень слабых ограничениях на меру μ, отношение $k_{\mu,n}(z_1, z_2)/k_{\mu,n}(z, z)$ стремится с ростом n к некоторому пределу, не зависящему от μ. Так как для меры Лебега указанный предел легко вычислить, получается, что главный член асимптотики отношений $k_{\mu,n}(z_1, z_2)/k_{\mu,n}(z, z)$ известен для широкого класса мер на единичной окружности и вещественной оси.

Для доказательства универсальности применялись несколько совершенно различных методов: метод задачи Римана-Гильберта, первый и второй методы Любинского, теория де Бранжа для решения обратных спектральных задач. Оказалось, что либо метод обслуживает слишком узкий класс мер ортогональности (например метод задачи Римана-Гильберта применялся для вещественно-аналитических весов), либо существенно использует компактность. В частности, в литературе отсутствуют оценки на скорость сходимости к универсальным пределам даже в простых ситуациях – когда мера абсолютно-непрерывна, а ее вес – гладкая функция, отделенная от нуля и бесконечности. Более того, для того, чтобы получить указанные оценки для сколько-нибудь широкого класса мер ортогональности, надо было предложить существенно новый метод доказательства универсальности, никак не использующий компактность. Это и было проделано в 2023г. в работе *R. Bessonov, On rate of convergence for universality limits, arXiv:2306.13722.*

Рассматривались вероятностные меры μ на единичной окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ удовлетворяющие так называемому условию Сегё:

$$\int_{\mathbb{T}} \log w \, dm > -\infty,$$

где $\mu = w\,dm + \mu_s$ – разложение меры на абсолютно непрерывную и сингулярную части (m – мера Лебега на $\mathbb{T}$). Для таких мер определена и конечна “функция энтропии”, введенная в недавней работе *R. Bessonov, S. Denisov. Zero sets, entropy, and pointwise asymptotics of orthogonal polynomials, Journal of Functional Analysis, vol 280 (2020).* Она определяется следующим образом:

$$\mathcal{K}_\mu(z) = \log\left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\, d\mu(\xi)\right) - \int_{\mathbb{T}} \log w(\xi) \frac{1-|z|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\, dm(\xi), \qquad |z| < 1.$$

Так как для меры $\mu = m$ асимптотическое поведение воспроизводящих ядер легко описать,

$$\frac{k_{m,n}(z_1,z_2)}{k_{m,n}(\zeta,\zeta)} = \frac{1-\overline{z_2}^n z_1^n}{n(1-\overline{z_2}z_1)} = \frac{e^{u+\bar v}-1}{u+\bar v} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad z_1 = \zeta e^{u/n},\ z_2 = \zeta e^{v/n},\ \ \zeta\in\mathbb{T},\ u,v\in\mathbb{C},$$

можно в общем случае сравнивать поведение $k_{\mu,n}(z_1,z_2)/k_{\mu,n}(z,z)$ и $k_{m,n}(z_1,z_2)/k_{m,n}(z,z)$. Была доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть мера μ удовлетворяет условию Сегё, и даны числа $A \geqslant 1$, $n \geqslant 10A$, а также точка $\zeta \in \mathbb{T}$. Существует число $\varepsilon_0 > 0$ зависящее лишь от A, такое, что если $z_{1,2} \in B(\zeta, A/n)$ и $\mathcal{K}_\mu(\rho\zeta) \leqslant \varepsilon_0$ для всех $\rho \in [1-A/n, 1)$, тогда*

(1)
$$\left|\frac{k_{\mu,n}(z_1,z_2)}{k_{\mu,n}(\zeta,\zeta)} - \frac{1-\overline{z_2}^n z_1^n}{n(1-\overline{z_2}z_1)}\right| \leqslant ce^{4A} \sup_{\rho\in[1-\delta,1)} \sqrt{\mathcal{K}_\mu(\rho\zeta)},$$

где $\delta = \max\limits_{k=1,2}|z_k - \zeta|$, и постоянная $c > 0$ является положительной.

Отметим, что правая часть в неравенстве (1) стремится к нулю при почти всех $\zeta \in \mathbb{T}$, а если мера μ имеет регулярность в точке ζ – несложно оценивается в терминах n.

Численным образом было проверено, что оценка (1) точна в классе мер Сегё (то есть для некоторых мер будет иметь место обратное неравенство с другой константой).

Опубликованные и поданные в печать работы.

Опубликованные работы:

- R. Bessonov, S. Denisov, Szegő condition, scattering, and vibration of Krein strings, Inventiones mathematicae, vol 234, pp. 291–373 (2023) (подано в печать в 2022г., вышла в 2023г.) https://doi.org/10.1007/s00222-023-01201-9

Работы, поданные в печать:

- R. Bessonov, On rate of convergence for universality limits, arXiv:2306.13722, submitted
- R. Bessonov, S. Denisov, Sobolev norms of L^2-solutions to NLS, arXiv:2211.07051, submitted (подано в печать в 2022г., продолжает рецензироваться)

Участие в конференциях и школах. Доклады на конференциях:

- Конференция “Recent Advances in Function Spaces and their Operators”, 8.05.2023-12.05.2023, Marrakesh, Morocco. Приглашенный доклад “Entropy function of a measure and how to use it in universality problems”.
- Конференция по комплексному анализу и его приложениям, 11.09.23–15.09.23, Красноярск, Россия. Доклад “Функция энтропии меры и сходимость универсальных пределов”.
- Научная школа “L. Euler Institute School in Analysis in Sirius”, 13.10.23-17.10.23, Сочи, Россия. Курс лекций “Entropy function in the theory of orthogonal polynomials”.
- Конференция “Спектральная теория, нелинейные задачи и приложения”, 8.12.23–11.12.23, Санкт-Петербург, Россия. Доклад “Решение дискретного нелинейного уравнения Шредингера на решетке $\mathbb{Z}$ с помощью алгоритма Шура для аналитических функций”.

Работа в научных центрах и международных группах. Не проводилась.

Педагогическая деятельность. *Научное руководство.* В 2023г. я осуществлял научное руководство П.В. Губкиным (аспирант ПОМИ РАН).

Преподавание. Весной 2023г. я вел лекции по дисциплине “Математический анализ, 4й семестр” (2 ак.ч. в неделю) и практические занятия по дисциплине “Математический анализ, 4й семестр” (3 ак.ч. в неделю). Осенью 2023г. я вел практические занятия по дисциплине “Математический анализ, 1й семестр” (3 ак.ч. в неделю), а также по дисциплине “Математический анализ, 3й семестр” (4 ак.ч. в неделю). Занятия проводились на факультете Математики и компьютерных наук СПбГУ.

Организационная деятельность. Совместно с Р.В.Романовым (СПбГУ) организована конференция “Спектральная теория, нелинейные задачи и приложения”, https://www.mathnet.ru/php/conference.phtml?confid=2344