# Отчёт по проекту "Автоморфизмы многообразий с действием тора" за 2023 год

СЕРГЕЙ ГАЙФУЛЛИН

## Результаты

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $X$ – аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{K}$. Мы изучаем группу $\mathrm{Aut}(X)$ регулярных автоморфизмов. В этой группе есть одномерные алгебраические подгруппы. Подгруппы, изоморфные аддитивной группе поля будем называть $\mathbb{G}_a$-подгруппами. $\mathbb{G}_a$-подгруппы находятся в соответствии с локально нильпотентными дифференцированиями (ЛНД) алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ на многообразии $X$. ЛНД – это линейный оператор $\delta\colon \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, удовлетворяющий тождеству Лейбница $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$ и такой, что для любого $f \in \mathbb{K}[X]$ найдётся натуральное число $m$ такое, что $\delta^m(f) = 0$. Если многообразие $X$ не допускает ненулевых ЛНД на $\mathbb{K}[X]$, что эквивалентно отсутствию $\mathbb{G}_a$-подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$, то многообразие называется жёстким.

1) Рассмотрим алгебру $B = \mathbb{K}[x, y, z]$, где $\mathbb{K}$ – поле. Если $\mathbb{K}[x, y, z] = \mathbb{K}[f, g, h]$, то будем говорить, что $f, g, h$ – переменные в $B$. Напомним, что рангом ЛНД называется минимальное количество переменных, которые не лежат в ядре данного ЛНД (минимум берётся по всем системам переменных). Соответственно, ранг ЛНД на $B$ может быть равен 0, 1, 2 и 3. ЛНД ранга 0 и 1 выглядят очень просто: это реплики частных производных в некоторой системе координат. К ЛНД ранга 2 относятся все триангуляризуемые ЛНД (но не только они). В совместной с N. Dasgupta работе мы вводим итерационную конструкцию, которой получаются все ЛНД ранга 2 и это даёт способ для многих примеров доказывать, что ЛНД ранга 2 нетриангуляризуемо. Также мы строим новые примеры ЛНД ранга 3. (Часть, написанная выше, вошла в отчёт прошлого года.) Существует ставшая классической процедура введённая J. Freudenburg, позволяющая получать одни ЛНД алгебры $\mathbb{K}[x, y, z]$ из других при некоторых условиях. Данная процедура называется "local slice construction". Пока что не известно примеров ЛНД данной алгебры, которые не получались бы с помощью local slice construction. Новый результат, не вошедший в отчёт прошлого года состоит в том, что нами получено достаточное условие того, что ЛНД, полученное с помощью local slice construction имеет ранг 3. Это позволяет конструировать ЛНД ранга 3 с помощью данной конструкции.

2) Триномиальная гиперповерхность – это аффинное алгебраическое многообразие, заданное одним уравнением вида

$$T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} = 0,$$

где $n = n_0 + n_1 + n_2$, причём $n_1$ и $n_2$ – натуральные числа, а $n_0$ – неотрицательное целое число. Если $n_0 = 0$, то мы считаем, что первый моном равен 1. Триномиальное многообразие – это многообразие заданное некоторой согласованной системой триномов. (Строгое определение можно найти в работе J. Hausen and M. Wrobel, 2017). Данный класс многообразий тесно связан с многообразиями с действием тора сложности 1. А именно, кольцо Кокса любого нормального неприводимого рационального многообразия с действием тора сложности 1, без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов дивизоров является алгеброй регулярных функций на некотором триномиальном многообразии. В работах Аржанцева (2016) и Гайфуллина (2019) описаны все жёсткие триномиальные гиперповерхности и жёсткие факториальные многообразия. В совместной работе с П. Евдокимовой и А. Шафаревичем мы завершаем работу по описанию жёстких триномиальных многообразий, то есть даём критерий жёсткости триномиального многообразия.

3) В совместной работе с Д. Чунаевым мы изучаем группы автоморфизмов триномиальных многообразий. Мы получили критерий того, что триномиальное многообразие имеет конечное число орбит группы регулярных автоморфизмов. Легко видеть, что для этого триномиальное многообразие должно быть не жёстким. (Критерий жёсткости получен в работе Евдокимовой-Гайфуллина-Шафаревича 2023). Отсутствия жёсткости не достаточно, но не жёсткие триномиальные многобразия с бесконечным числом орбит легко описываются: это прямые произведения жёсткого триномиального многобразия и аффинного пространства. Применяя конструкцию Кокса мы доказываем, что группа регулярных автоморфизмов многобразия с действием тора сложности 1, удовлетворяющего техническим условиям (нормального неприводимого рационального, без непостоянных обратимых функций и с конечно порождённой группой классов дивизоров) имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда данное многообразие допускает ЛНД горизонтального типа (то есть ограничение данного ЛНД на инварианты тора нетривиально).

4) Группа автоморфизмов аффинного многообразия обычно не является алгебраической группой. Несложно доказать, что если многообразие не является жёстким и имеет размерность хотя бы 2, то его группа автоморфизмов не алгебраическая (она имеет бесконечную размерность, то есть содержит алгебраическую подгруппу любой размерности). Однако у данной группы можно корректно определить связную компоненту (согласно работе Ramanujam 1964). Гипотеза Зайденберга-Перепечко состоит в том, что если многообразие жёсткое, то связная компонента группы автоморфизмов является алгебраической (и даже алгебраическим тором). В совсместной работе с В. Боровик мы доказываем данную гипотезу для торических (не нормальных) многообразий и многобразий с действием тора сложности 1. Основным техническим инструментом нашей работы являются так называемые изолированные неприводимые полуинварианты тора, которые мы вводим в этой работе. Техника связанная с данными полуинвариантами зачастую позволяет описать нормальзатор некоторого тора в группе автоморфизмов. А поскольку в работе Аржанцева-Гайфуллина (2017) доказано, что максимальный тор в группе автоморфизмов жёсткого многообразия является нормальной подгруппой, описание его нормализатора эквивалентно описанию всей группы автоморфизмов. Также в этой работе мы исследуем, для каких наборов чисел $k_1, \ldots, k_m$ многообразие $Y = \mathrm{Susp}(X, f, k_1, \ldots, k_m)$, получающееся из жёсткого многообразия $X$ конструкцией $m$-надстройки также является жёстким. Напомним, что $m$-надстройка – это многообразие в $X \times \mathbb{K}^m$, заданное уравнением $y_1^{k_1} \ldots y_m^{k_m} - f = 0$, где $f$ – регулярная функция на $X$, а $y_1, \ldots, y_m$ – координаты на $\mathbb{K}^m$. Ответ оказывается в том, что наибольший общий делитель чисел $k_1, \ldots, k_m$ должен быть равен 1. Далее используя нашу технику мы доказываем, что в случае, когда $k_1, \ldots, k_m$ взаимно просты в совокупности, связная компонента группы автоморфизмов $m$-надстройки $Y$ есть произведение подгруппы в группе автоморфизмов многообразия $X$ и алгебраического тора.

5) Пусть $X$ – аффинное алгебраическое многообразие. Напомним, что инвариантом Макар-Лиманова $ML(X)$ многообразия $X$ называется подалгебра в алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$, равная пересечению всех ядер локально нильпотентных дифференцирований на $\mathbb{K}[X]$. Данный инвариант может быть использован, например, для того, чтобы доказывать, что два многообразия не изоморфны. Инвариант Дерксена в свою очередь есть подалгебра в алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$, порождённая ядрами всех ненулевых ЛНД. Обозначим инвариант Дерксена через HD(X).

Напомним, что элемент $s$ называется слайсом локально нильпотентного дифференцирования $D$, если $D(s) = 1$. Не все локально нильпотентные дифференцирования имеют слайс. В книге Фройденбурга (2006) был введён аналог этих инвариантов, которые мы называем модифицированным инвариантами Макар-Лиманова и Дерксена и обозначаем, соответственно, $ML^*(X)$ и $HD^*(X)$. Инвариант $ML^*(X)$ равен пересечению всех ядер локально нильпотентных дифференцирований, имеющих слайсы, а инвариант $HD^*(X)$ порождён всеми этими ядрами. В предыдущей работе Гайфуллина и Шафаревича (2022) было доказано, что если на многообразии есть ЛНД со слайсом, то инварианты $ML(X)$ и $ML^*(X)$ совпадают, то есть $ML^*(X)$ не даёт нового инварианта, а вот инвариант $HD^*(X)$ может быть нетривиальным в случае, когда все три инварианта $ML(X)$, $ML^*(X)$ и $HD(X)$ тривиальны.

В совместной работе с И. Болдыревым и А. Шафаревичем мы изучаем, как может быть устроен инвариант $HD^*(X)$. Если на многообразии $X$ есть хотя бы одно ЛНД со слайсом (известно, что это эквивалентно тому, что $X \cong Y \times \mathbb{K}$ для некоторого многообразия $Y$), то либо $HD^*(X) = \mathbb{K}[X]$, либо $HD^*(X) = \mathbb{K}[Y]$ (этот случай равносилен тому, что многообразие $Y$ жёсткое), либо алгебра $HD^*(X)$ не является конечно порождённой. Также для каждого из этих случаев мы приводим достаточные условия, при которых данное многообразие попадает в этот случай.

## Публикации

Принятые в печать:

1) С.А. Гайфуллин и Д.А. Чунаев, "Многообразия с действием тора сложности 1, имеющие конечное число орбит группы автоморфизмов". Принята в печать в Фундаментальная и прикладная математика.

Поданные в печать:

1) Sergey Gaifullin and Nikhilesh Dasgupta. ”On locally nilpotent derivations of polynomial algebra in three variables”, arXiv:2306.00510

2) Polina Evdokimova, Sergey Gaifullin, and Anton Shafarevich. ”Rigid Trinomial Varieties”, arXiv:2307.06672

3) Viktoria Borovik, Sergey Gaifullin. ”Isolated torus invariants and automorphism groups of rigid varieties”, arXiv:2007.07882

4) Ilya Boldyrev, Sergey Gaifullin, and Anton Shafarevich, ”Modified Derksen invariant”, arXiv:2312.08421

## Участие в конференциях и школах

- Курс лекций "Инвариант Макар-Лиманова и автоморфизмы аффинных алгебраических многообразий"на десятой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», (Москва, ВШЭ, 28 января - 2 февраля 2023);
- Доклад "Modified Makar-Limanov invariant"на Российско-индийском семинаре "Affine Spaces, Algebraic Group Actions, and LNDs (Kolkata, India, The Indian Statistical Institute, 13-17 марта 2023).
- Доклад "Градуированный аналог проблемы существования диких автоморфизмов"на Математическом блице, (Москва, ВШЭ, 10 апреля 2023);
- Курс лекций «Многоугольники Ньютона и автоморфизмы алгебры многочленов» на весенней школе-конференции института Эйлера по алгебре (Санкт-Петербург, институт Эйлера, 29 апреля — 3 мая 2023);
- Доклад "Automorphisms of the space of $n \times n$-matrices preserving immanants"на конференции "Algebraic groups: the White Nights season III"(Санкт-Петербург, 10-14 июля 2023);
- Доклад "Приложения алгебраической геометрии к линейной алгебре"на второй летней школе "Алгебраические группы преобразований II"(Подмосковье, дом отдыха "Пялово 31 июля – 4 августа 2023);
- Доклад "Локально нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от 3 переменных"на третьей конференции математических центров России (Майкоп, 10-15 октября 2023).

## Педагогическая деятельность

**МГУ:**

Лекционная нагрузка:

- лектор по курсу "Алгебра"на 2 потоке 1 курса мех-мата МГУ (осенний семестр);
- курс естественно научного содержания "Прикладные вопросы алгебры 4-5-6 курс мех-мата (осенний семестр);
- спецкурс "Алгебраическая геометрия и теория инвариантов 3-6 курс мех-мата (весенний семестр).

Семинарская нагрузка:

- семинары по курсу "Линейная алгебра и геометрия 1 курс (весенний семестр, 1 группа);
- семинары по курсу "Алгебра 1 курс (осенний семестр, 1 группа);
- семинары по курсу "Алгебра 2 курс (осенний семестр, 1 группа);
- соруководство совместно с Д.А. Тимашёвым, А.А. Шафаревичем и А.А. Горницким спецсеминаром "Алгебра и геометрия"(оба семестра).

Научное руководство:

- 1 аспирант
- 8 студентов

**ВШЭ:**

- Лекции и семинары в одной группе по курсу "Линейная алгебра"на специализации "Компьютерные науки и анализ данных факультет компьютерных наук. (весенний семестр)
- Семинары в 1 группе по курсу "Алгебра"на специализации "Прикладная математика и информатика факультет компьютерных наук. (4 модуль, то есть половина весеннего семестра)
- Соруководство совместно с И.В. Аржанцевым, А.Ю. Перепечко и А.А. Шафаревичем научным семинаром научно-учебной лаборатории "алгебраических групп преобразований".

Научное руководство:

- 1 аспирант