Отчёт по проекту "Автоморфизмы многообразий с действием тора"

СЕРГЕЙ ГАЙФУЛЛИН

Результаты

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и X – аффинное алгебраическое многообразие над $\mathbb{K}$. Мы изучаем группу $\mathrm{Aut}(X)$ регулярных автоморфизмов. В этой группе есть одномерные алгебраические подгруппы. Подгруппы, изоморфные аддитивной группе поля будем называть $\mathbb{G}_a$-подгруппами, а подгруппы, изоморфные мультипликативной группе поля – $\mathbb{G}_m$-подгруппами. Группа $\mathrm{AAut}(X)$ – это группа порождённая всеми $\mathbb{G}_a$ и $\mathbb{G}_m$-подгруппами, а группа специальных автоморфизмов $\mathrm{SAut}(X)$ – это группа, порождённая только $\mathbb{G}_a$-подгруппами. $\mathbb{G}_a$-подгруппы находятся в соответствии с локально нильпотентными дифференцированиями (ЛНД) алгебры регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ на многообразии X. ЛНД – это линейный оператор $\delta\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, удовлетворяющий тождеству Лейбница $\delta(fg) = f\delta(g)+g\delta(f)$ и такой, что для любого $f \in \mathbb{K}[X]$ найдётся натуральное число m такое, что $\delta^m(f) = 0$.

1) Рассмотрим триномиальную гиперповерхность. Так называется аффинное алгебраическое многообразие, заданное одним уравнением вида

$$T_{01}^{l_{01}} \dots T_{0n_0}^{l_{0n_0}} + T_{11}^{l_{11}} \dots T_{1n_1}^{l_{1n_1}} + T_{21}^{l_{21}} \dots T_{2n_2}^{l_{2n_2}} = 0,$$

где $n = n_0 + n_1 + n_2$, причём n_1 и n_2 – натуральные числа, а n_0 – неотрицательное целое число. Если $n_0 = 0$, то мы считаем, что первый моном равен 1. Данный класс многообразий тесно связан с многообразиями с действием тора сложности 1. А именно, кольцо Кокса любого многообразия с действием тора сложности 1 (с некоторыми техническими условиями) задаётся согласованной системой таких триномиальных уравнений. В работе Гайфуллина (2019) описаны все жёсткие триномиальные гиперповерхности (то есть те, для которых не существует $\mathbb{G}_a$-подгрупп в $\mathrm{Aut}(X)$), а в работе Аржанцева-Гайфуллина (2017) описана группа автоморфизмов для жёстких триномиальных гиперповерхностей.

В совместной работе с Г.Ширинкиным мы исследуем орбиты группы автоморфизмов для случая нежёстких триномиальных гиперповерхностей. Нами доказана теорема о том, что для любой нежёсткой триномиальной гиперповерхности количество $\mathrm{AAut}(X)$-орбит конечно. Из этого, естественно, следует, что и количество $\mathrm{Aut}(X)$-орбит конечно. Далее для широкого класса многообразий мы доказываем, что $\mathrm{AAut}(X)$-орбиты, состоящие из особых точек совпадают с T-орбитами, где T – тор сложности 1 естественно действующий на гиперповерхности. Для гиперповерхностей вида

$$\mathbb{V}(xy_1^{a_1} \dots y_m^{a_m} + z_1^{b_1} \dots z_p^{b_p} + s_1^{c_1} \dots s_m^{c_m}), a_i, b_j, c_k \geq 2$$

мы явно описали $\mathrm{AAut}(X)$-орбиты и $\mathrm{SAut}(X)$-орбиты.

2) Пусть X – проективное алгебраическое многообразие. Рассмотрим группу регулярных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ является линейной алгебраической группой. Мы можем рассмотреть её связную компоненту единицы $\mathrm{Aut}(X)^0$. Будем изучать орбиты естественного действия этой группы.

Если связная линейная алгебраическая группа G действует на X, то G отображается в $\mathrm{Aut}(X)^0$. Следовательно, $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты – это объединения G-орбит. Таким образом, если нам известно описание G-орбит, мы должны понять лишь какие пары G-орбит могут быть склеены элементом из $\mathrm{Aut}(X)^0$. Этот подход особенно эффективен, если существует лишь конечное число G-орбит. В этой работе мы изучаем $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на проективных орисферических многообразиях сложности ноль. Напомним, что многообразие называется *орисферическим*, если оно допускает такое действие связной линейной алгебраической группы G, что стабилизатор точки общего положения содержит максимальную унипотентную подгруппу. Мы говорим, что орисферическое многообразие имеет *сложность ноль*, если действие G на X имеет открытую орбиту. Класс орисферических многообразий – это естественное обобщение класса торических многообразий.

В работе Бажова (2013) описаны все $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на полном торическом многообразии. В работе Аржанцева-Бажова (2013) получено описание $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбит для аффинного торического многообразия. Заметим, что для аффинного многообразия группа $\mathrm{Aut}(X)$ может быть не алгебраической. Мы определяем связную компоненту единицы $\mathrm{Aut}(X)^0$ как подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, порождённую всеми алгебраическими семействами автоморфизмов. Здесь алгебраическое семейство – это множество автоморфизмов $\{\varphi_b \mid b \in B\}$, где B – неприводимое алгебраическое многообразие, отображение $\varphi\colon B \times X \to X$ является морфизмом и $\varphi_b(x) = \varphi(b, x)$.

Пусть X – полное торическое многообразие. Тогда количество T-орбит на нём конечно. Замыкания орбит коразмерности 1 – это в точности все T-инвариантные простые дивизоры на X. Рассмотрим точку $x \in X$. Обозначим через $D(x)$ множество простых T-инвариантных дивизоров D таких, что $x \notin D$. Ясно, что если x и y лежат в одной T-орбите, то $D(x) = D(y)$. Таким образом мы можем обозначить через $D(\mathcal{O})$ множество $D(x)$ для любого x из T-орбиты $\mathcal{O}$. теперь рассмотрим подмоноид $\Gamma(\mathcal{O})$ в группе классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$, порождённый классами дивизоров из $D(\mathcal{O})$. В работе Бажова доказано следующее утверждение. "Пусть X – полное торическое многообразие. Две T-орбиты $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ лежат в одной $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбите тогда и только тогда, когда $\Gamma(\mathcal{O}) = \Gamma(\mathcal{O}')$."

Такой же критерий верен для аффинных торических многообразий, как доказано в работе Аржанцева-Бажова.

Наша цель – изучить $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбиты на аффинных и проективных нормальных орисферических многообразиях сложности ноль. В случае орисферического многообразия мы определяем $D(x)$ как множество простых G-инвариантных дивизоров D таких, что $x \notin D$. Снова ясно, что $D(x)$ зависит только от G-орбиты, в которой лежит точка x, поэтому мы будем использовать обозначение $D(\mathcal{O})$. Но для орисферических многообразий мы заменяем группу $\mathrm{Cl}(X)$ на её модификацию $\mathrm{Cl}_G(X)$. Определим $\Gamma_G(\mathcal{O})$ аналогично случаю торических многообразий. В моей работе доказано, что условие из теоремы Бажова остаётся необходимым. Но это условие не является достаточным в случае орисферических многообразий. Я формулирую гипотезу, что если размерности касательных пространств в точках орбит $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ совпадают, то это условие достаточно.

3) Пусть X – аффинное алгебраическое многообразие. Напомним, что инвариантом Макар-Лиманова $ML(X)$ многообразия X называется подалгебра в алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$, равная пересечению всех ядер локально нильпотентных дифференцирований на $\mathbb{K}[X]$. Данный инвариант может быть использован, например, для того, чтобы доказывать, что два многообразия не изоморфны. Напомним, что элемент s называется слайсом локально нильпотентного дифференцирования D, если $D(s) = 1$. Не все локально нильпотентные дифференцирования имеют слайс. В книге Фройденбурга (2006) был введён аналог этого инварианта, который мы называем модифицированным инвариантом Макар-Лиманова. Этот инвариант $ML^*(X)$ равен пересечению всех ядер локально нильпотентных дифференцирований, имеющих слайсы. Легко видеть, что $ML(X)^* \supseteq ML(X)$. Однако во всех примерах оказывалось, что либо не существует ни одного ЛНД со слайсом, либо эти инварианты совпадают. Так И. Болдырев доказал, что данные инварианты совпадают для торических многообразий в случае существования ЛНД со слайсом, а также дал явное описание этих инвариантов. В совметной работе с А. Шафаревичем мы доказываем общий факт, что $ML(X)^* = ML(X)$ при условии существования ЛНД со слайсом. В качестве техники использована техника развитая в статье Аржанцева-Зайденберга-Калимана-Кучебауха-Фленера (2012). А именно, аналогично результатам данной статьи мы доказываем, что группа автоморфизмов действует бесконечно транзитивно на любой орбите группы специальных автоморфизмов, имеющей размерность не менее 2. Напомним, что группа специальных автоморфизмов $SAut(X)$ – это группа, порождённая всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля. Такие подгруппы соответствуют локально нильпотентным дифференцированиям. Можно рассмотреть подгруппу, порождённую всеми aIIитивными подгруппами, соответствующими ЛНД со слайсами. Обозначим её $SAut(X)^*$. Из бесконечной транзитивности $SAut(X)$ на орбитах размерности ≥ 2 мы выводим, что типичные $SAut(X)^*$ и $SAut(X)$-орбиты совпадают, что даёт равенство инвариантов. Например, для гибких многообразий оба инварианта состоят только из констант.

Существуют два, ставших классическими инварианта, связанных с ЛНД: инвариант Макар-Лиманова и инвариант Дерксена. Второй есть подалгебра, порождённая ядрами всех ненулевых ЛНД. Обозначим инвариант Дерксена через HD(X). Можно рассмотреть его модифицированный аналог $HD(X)^*$, равный подалгебре, порождённой ядрами всех ЛНД со слайсами. Мы приводим пример многообразия, для которого $HD(X)$ не совпадает с $HD(X)^*$. Более того данное многообразие гибко и у него инварианты $ML(X)$, $ML(X)^*$ и $HD(X)$ тривиальны, а инвариант $HD(X)^*$ не тривиален. Это показывает то, что вновь введённый инвариант $HD(X)^*$ не сводится к известным ранее.

4) Рассмотрим алгебру $B = \mathbb{K}[x, y, z]$, где $\mathbb{K}$ – поле. Если $\mathbb{K}[x, y, z] = \mathbb{K}[f, g, h]$, то будем говорить, что f, g, h – переменные в B. Напомним, что рангом ЛНД называется минимальное количество переменных, которые не лежат в ядре данного ЛНД (минимум берётся по всем системам переменных). Соответственно, ранг ЛНД на B может быть равен 0, 1, 2 и 3. ЛНД ранга 0 и 1 выглядят очень просто: это реплики частных производных в некоторой системе координат. К ЛНД ранга 2 относятся все триангуляризуемые ЛНД (но не только они). В совместной с N. Dasgupta работе мы вводим итерационную конструкцию, которой получаются все ЛНД ранга 2 и это даёт способ для многих примеров доказывать, что ЛНД ранга 2 нетриангуляризуемо. Также мы строим новые примеры ЛНД ранга 3. Это ценный результат, так как не так давно было доказано существование ЛНД ранга 3 и примеров не очень много и они все довольно технически сложные. Наши

примеры также технически сложны, но в некотором смысле мы объясняем, откуда они берутся. Технически результат основан на рассмотрении ЛНД, коммутирующих с данным. Мы доказываем, что если ЛНД имеет ранг 3, то не существует неэквивалентных (то есть с несовпадающими ядрами) ЛНД. А если D – неприводимое ЛНД ранга 2 и E – неэквивалентное, коммутирующее с D ЛНД, то любое другое коммутирующее с D ЛНД имеет вид $E' = \sigma D + f(x)E$, где $\sigma \in \operatorname{Ker} D$, а x – единственная с точностью до линейной замены переменная, лежащая в $\operatorname{Ker} D \cap \operatorname{Ker} E$.

Публикации

Вышедшие за год:

1) Viktoriia Borovik, Sergey Gaifullin and Anton Trushin. "Commutative actions on smooth projective quadrics Communications in Algebra **50:12** (2022), 5468-5476. DOI: 10.1080/00927872.2022.2086986 (в этой работе нет указания на благодарность конкурсу, так как она была подана раньше).

2) С.А. Гайфуллин. "Орбиты групп автоморфизмов орисферических многообразий и группа классов дивизоров Труды МИАН, 318 (2022), 43–50.

Поданные в печать:

1) Sergey Gaifullin and Georgiy Shirinkin. "Orbits of automorphism group of trinomial hypersurfaces". arXiv:2212.05899

2) Sergey Gaifullin and Anton Shafarevich. "Modified Makar-Limanov and Derksen invariants". arXiv:2212.05899

Находящиеся в финальной стадии написания текста:

1) Sergey Gaifullin and Nikhilesh Dasgupta. "On commuting locally nilpotent derivations of polynomial algebra in three variables".

Участие в конференциях и школах

- Приглашённый доклад "Orbits of automorphism groups of trinomial hypersurfaces"на конференции "Algebraic groups: the White Nights season II"(Санкт-Петербургб 4-8 июля 2022);
- Доклад "Локально нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от 3 переменных"на второй конференции математических центров России (Москваб 7-11 ноября 2022).
- Курс лекций «Автоморфизмы алгебры многочленов и многоугольники Ньютона» на летней школе для студентов в Красновидово. 27 июля — 8 августа 2022 (МГУ).
- Курс лекций ”Автоморфизмы алгебры многочленов: теорема Юнга и структурная теорема при $n = 2$” на выездной школе-конференции лаборатории "алгебраических групп преобразований"(ВШЭ).

Педагогическая деятельность

МГУ:

Лекционная нагрузка:

- лектор по курсу "Алгебра"на 2 потоке 2 курса мех-мата МГУ (осенний семестр);
- курс естественно научного содержания "Прикладные вопросы алгебры 4-5-6 курс мех-мата (осенний семестр);
- спецкурс "Алгебраическая геометрия и теория инвариантов 3-6 курс мех-мата (осенний семестр).

Семинарская нагрузка:

- семинары по курсу "Линейная алгебра и геометрия 1 курс (весенний семестр);
- семинары по курсу "Алгебра 1 курс (осенний семестр);
- семинары по курсу "Алгебра 2 курс (2 группы) (осенний семестр);
- соруководство совместно с Д.А. Тимашёвым, А.А. Шафаревичем и А.А. Горницким спецсеминаром "Алгебра и геометрия"(оба семестра).

Научное руководство:

- 2 аспиранта
- 5 студентов

ВШЭ:

- Веду лекции и семинары в одной группе по курсу "Линейная алгебра"на специализации "Компьютерные науки и анализ данных факультет компьютерных наук. (весь год)
- Веду семинары в 1 группе по курсу "Алгебра"на специализации "Прикладная математика и информатика факультет компьютерных наук. (4 модуль, то есть половина весеннего семестра)
- Соруководство совместно с И.В. Аржанцевым, А.Ю. Перепечко и А.А. Шафаревичем научным семинаром научно-учебной лаборатории "алгебраических групп преобразований".