“Молодая математика России”
Отчет за 2022 год

Андрей Солдатенков

Результаты, полученные в этом году

Основные результаты, полученные в этом году, связаны с изучением гиперкэлеровых орбифолдов. В работе [1] изучаются их мотивы Андрэ и получены обобщения на случай орбифолдов некоторых результатов, которые до этого были доказаны для гладких гиперкэлеровых многообразий.

Гиперкэлеровы орбифолды являются комплексными многообразиями с фактор-особенностями. Более точно, под комплексным орбифолдом мы понимаем нормальное комплексно-аналитическое пространство X, каждая точка $x \in X$ которого имеет открытую окрестность, изоморфную U/G, где $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытая окрестность нуля, а $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ — конечная группа, сохраняющая U. Мы можем без ограничения общности считать, что группа G не содержит псевдоотражений. При этом G изоморфна фундаментальной группе гладкой части малой открытой окрестности точки x в многообразии X.

Если $U/G \subset X$ — локальная карта на комплексном орбифолде, обозначим через U° прообраз в U гладкой части многообразия X. На комплексных орбифолдах можно определить все понятия, привычные при изучении дифференциальной геометрии гладких многообразий, такие как дифференциальные формы, римановы метрики и т.д. Например, дифференциальная форма на X — это дифференциальная форма ω на гладкой части X, такая что для любой локальной карты $U/G \subset X$ прообраз ω в U° является ограничением некоторой гладкой дифференциальной формы на U. Форма ω кэлерова, если этот прообраз является ограничением кэлеровой формы на U. Для кэлеровых орбифолдов верны аналоги большинства известных теорем дифференциальной геометрии, таких как теорема де Рама, разложение Ходжа и Лефшеца, а также теорема двойственности Пуанкаре для когомологий с рациональными коэффициентами.

Компактный комплексный орбифолд X называется гиперкэлеровым, если на нем задана риманова метрика, группа голономии которой равна $Sp(n/2)$, где n — комплексная размерность X. Как и в гладком случае, на гиперкэлеровом орбифолде имеется тройка комплексных структур I, J, K, удовлетворяющих кватернионным соотношениям $IJ = -JI = K$. На когомологиях X действует алгебра Ли, порожденная $\mathfrak{sl}_2$-тройками для всех операторов Лефшеца всех кэлеровых форм. Эта алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{so}(4, b_2(X)-2)$. Также на вторых когомологиях X есть естественная квадратичная форма Бовиля–Богомолова–Фуджики, как и в гладком случае.

Примером гиперкэлерова орбифолда является особая K3-поверхность, полученная стягиванием (-2)-кривой в точку. Такая поверхность допускает малую деформацию, которая является гладкой. Существуют также гиперкэлеровы орбифолды, особенности которых нельзя устранить малой деформацией, и они представляют для нас особый интерес. Этим мотивировано следующее определение: гиперкэлеров орбифолд X называется непреводимым, если его гладкая часть является односвязной, а особенности имеют коразмерность не меньшую четырех. Особенности неприводимых гиперкэлеровых орбифолдов являются терминальными и сохраняются при любых деформациях. Теория деформаций и пространств модулей неприводимых гиперкэлеровых орбифолдов полностью аналогична гладкому случаю.

Нашей целью является доказательство того, что мотивы Андрэ проективных гиперкэлеровых орбифолдов являются абелевыми. Из этого вытекает ряд следствий, в частности тот факт, что все ходжевы классы когомологий на таких орбифолдах являются абсолютными. Мотивы Андрэ комплексных орбифолдов можно определить с помощью разрешения особенностей, использую тот факт, что когомологии орбифолда с рациональными коэффициентами вкладываются в когомологии его разрешения. Последнее следует из того, что для орбифолдов выполнена двойственность Пуанкаре с рациональными коэффициентами. Определив мотивы Андрэ гиперкэлеровых орбифолдов, мы обобщаем принцип деформации Андрэ и с помощью конструкции Куга-Сатаке получаем следующий результат.

Теорема 1. *Предположим, что X_1 и X_2 деформационно-эквивалентные проективные неприводимые гиперкэлеровы орбифолды, у которых $b_2 \geqslant 4$. Если мотив Андрэ X_1 абелев, то и мотив Андрэ X_2 также абелев.*

Эта теорема применяется следующим образом. Предположим, что гиперкэлеров орбифолд X получен явной геометрической конструкцией, которая позволяет доказать абелевость его мотива Андрэ. Тогда любая деформация X также имеет абелев мотив Андрэ. Как правило произвольные деформации X не имеют простого геометрического описания, и доказать абелевость их мотивов сложнее, чем для самого X. Для этого и можно применить приводимую выше теорему.

В качестве примера, рассмотрим К3-поверхность S с симплектической инволюцией f. Рассмотрим индуцированную симплектическую инволюцию $f^{[2]}$ схемы Гильберта $S^{[2]}$. Можно доказать, что $f^{[2]}$ имеет 28 изолированных неподвижных точек и неподвижную К3-поверхность $S' \subset S^{[2]}$. Пусть Y — раздутие $S^{[2]}$ в S', а X — фактор Y по действию $f^{[2]}$, который является неприводимым гиперкэлеровым орбифолдом. Известно, что мотивы Андрэ многообразий $S^{[2]}$, S' и Y абелевы, а значит абелев и мотив орбифолда X. Можно показать, что общая деформация X не может быть получена описанной конструкцией. Тем не менее, ко всем деформациям X применима приведенная выше теорема, поэтому их мотивы абелевы. Данный пример типичен в том смысле, что все известные неприводимые гиперкэлеровы орбифолды получаются из аналогичных конструкций, и к ним применима наша теорема.

Опубликованные и поданные в печать работы

[1] A. Soldatenkov, *Cohomology and André motives of hyperkähler orbifolds*, arXiv:2209.11029

Участие в конференциях и школах

(1) "Complex Geometry in Byurakan", June 6–10, Byurakan, Armenia. Доклад "C-symplectic structures and Lagrangian fibrations"

(2) Летняя математическая школа “Алгебра и геометрия”, 28–31 июля, Суздаль. Курс лекций на тему “О-минимальные структуры и теория Ходжа”

Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь научным сотрудником МЦМУ МИАН.

Педагогическая деятельность

В весеннем семестре 2022 читал курс лекций “Введение в кэлерову геометрию” в НОЦ МИАН. Программа курса:

(1) Эрмитовы расслоения, связности, кривизна, классы Черна.
(2) Кэлеровы метрики, дифференциальные операторы на кэлеровых многообразиях.
(3) Разложение Ходжа, структуры Ходжа на когомологиях кэлеровых многообразий.
(4) Разложение Лефшеца и теоремы Лефшеца.
(5) Положительные расслоения, теорема Кодаиры о вложении.
(6) Деформации комплексных структур и вариации структур Ходжа.
(7) Гипотеза Калаби, многообразия Калаби-Яу, гиперкэлеровы многообразия.