Отчет по гранту «Молодая математика России» за 2023 год

ФИО участника: **Жуйков Константин Николаевич**.
Название проекта: **Эта-инварианты, ассоциированные с действиями групп, и их приложения к задачам об индексе**.
Ключевые слова: *эллиптический оператор, оператор со сдвигами, оператор с параметром, эта-инвариант, индекс.*

1 Полученные результаты.

В этом году было продлжено исследование η-инвариантов для различных классов операторов. Пользуясь подходом Мельроуза [9], который определил η-инвариант как регуляризацию числа вращения эллиптического псевдодифференциального оператора (ПДО) с параметром (см. [1, 5]), мы построили η-инвариант для краевых задач с параметром [1] и исследовали его свойства. Более точно, число вращения обратимого эллиптического ПДО с параметром $D(p)$, $p \in \mathbb{R}$, формально вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left(D(p)^{-1}\partial_p D(p)\right) dp, \quad \partial_p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{d}{dp},$$

где след существует только для операторов сильно отрицательного порядка, а интеграл может расходиться. Поэтому построение соответствующих регуляризаций играет ключевую роль при исследовании η-инварианта. В случае краевых задач с параметром регуляризация следа подразумевает получение асимптотики на бесконечности следа композиций обратимых краевых задач с параметром — основной технический результат работы (см. теорему 1 ниже).

Напомним, что *краевой задачей с параметром* на гладком компактном многообразии M с краем ∂M называется оператор вида

$$\mathcal{A}(p) = \begin{pmatrix} D(p) \\ \\ i^* B(p)\end{pmatrix} : C^\infty(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix} \tag{1}$$

где $D(p)$ и $B(p)$ — ПДО с параметром порядков m и b, соответственно, $i^*\colon C^\infty(M,E) \to C^\infty(\partial M, E|_{\partial M})$ — оператор сужения сечений на край, индуцированный вложением $i\colon \partial M \hookrightarrow M$, E и F — комплексные векторные расслоения на M, а G — комплексное векторное расслоение на ∂M. Будем говорить, что краевая задача (1) имеет *тип* $d \in \mathbb{Z}$, если $B_k(p) = 0$ при всех $k \geqslant d$, т.е. тип равен максимальному порядку нормальной производной в краевых условиях плюс один. Будем предполагать, что тип $d \leqslant \operatorname{ord} D(p)$.

Фиксируем числа m_0, b_0 и d_0. Через $\Psi_p(M)$ обозначим алгебру операторов с параметром

$$\mathcal{D}(p)\colon \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

мультипликативно порождённую композициями вида $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_0(p)^{-1}$, где множители — краевые задачи с параметром

$$\mathcal{D}_0(p), \mathcal{D}_1(p)\colon C^\infty(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

причём задача $\mathcal{D}_0(p)$ имеет порядки (m_0, b_0) и тип d_0 и является эллиптической и обратимой при всех $p \in \mathbb{R}$, а задача $\mathcal{D}_1(p)$ имеет порядки (m_1, b_1) и тип d_1, подчинённые неравенствам

$$m_1 \leqslant m_0, \quad b_1 \leqslant b_0, \quad d_1 \leqslant d_0.$$

Из этого определения следует, что алгебра $\Psi_p(M)$ состоит из линейных комбинаций произведений вида

$$\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1},$$

где порядки и тип операторов с параметром $\mathcal{D}_j$ удовлетворяют неравенствам

$$m_j \leqslant m_0, \quad b_j \leqslant b_0, \quad d_j \leqslant d_0 \qquad \forall j \geqslant 1, \tag{2}$$

а задачи $\mathcal{D}_{0j}$ являются эллиптическими с параметром и имеют порядки (m_0, b_0) и тип d_0.

Теорема 1. *Пусть для произведения*

$$\mathcal{D}(p)=\prod_{j=1}^{N}\mathcal{D}_j(p)\mathcal{D}_{0j}(p)^{-1}$$

выполнены неравенства (2) *и неравенства*

$$m_1-m_0+k<-\dim M,\quad b_1-b_0+k<-\dim M+1,\quad \text{где}\quad k=\sum_{j=2}^{N}\max(m_j-m_0,b_j-b_0).$$

Тогда семейство $\mathcal{D}(p)$ состоит из ядерных операторов (т.е. операторов, для которых существует след) и для следа семейства существует асимптотическое разложение при $p\to\pm\infty$ вида

$$\operatorname{tr}\mathcal{D}(p)\sim p^\ell\sum_{j\leqslant 0}c_j^{\pm}p^j,\quad \text{где}\quad \ell=\max(m_1-m_0+k+\dim M,b_1-b_0+k+\dim M-1),$$

причём разложение можно дифференцировать по параметру любое число раз.

Доказательство этого результата задействует аппарат краевых задач для ПДО [3,7] (см. также [6,8]) и состоит в сведении краевых задач для ПДО с параметром к краевым задачам для ПДО (без параметра) на цилиндре.

Теперь определим регуляризации для следа и интеграла. Введём пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, состоящее из функций $f(p)\in C^\infty(\mathbb{R})$, имеющих асимптотическое разложение

$$f(p)\sim\sum_{i\leqslant N}c_i^{\pm}p^i+\sum_{0\leqslant j\leqslant N}d_j^{\pm}p^j\ln|p|\quad \text{при } p\to\pm\infty,$$

где $N>0$ — некоторое целое число, а $c_j^{\pm},d_j^{\pm}\in\mathbb{C}$. Причём это разложение можно дифференцировать произвольное число раз. Через $\mathcal{P}\subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство многочленов.

Определение 1. *Регуляризованным следом* будем называть функционал

$$\mathrm{TR}\colon\Psi_p(M)\longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P},$$
$$(\mathrm{TR}\,\mathcal{D})(p)=\int_0^p\int_0^{q_{\ell-1}}\cdots\int_0^{q_1}\operatorname{tr}\bigl(\partial_q^\ell\mathcal{D}(q)\bigr)dq\,dq_1\dots dq_{\ell-1},$$

где

$$\ell\geqslant\max(m_1-m_0+k+\dim M+1,b_1-b_0+k+\dim M).$$

Определим *регуляризованный интеграл*

$$⨍_{\mathbb{R}}\colon S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{C},\qquad ⨍_{\mathbb{R}}f(p)dp=c_0,$$

где c_0 — постоянный член в асимптотическом разложении интеграла

$$\int_{-T}^{T}f(p)dp\sim\sum_{j\leqslant N}c_jT^j+\sum_{0\leqslant j\leqslant N}d_jT^j\ln T\quad \text{при}\quad T\to+\infty,$$

где $N>0$ — некоторое целое число, а $c_j,d_j\in\mathbb{C}$.

Для краткости введём следующее обозначение для композиции регуляризованных следа и интеграла:

$$\mathrm{Tr}\stackrel{\mathrm{def}}{=}⨍_{\mathbb{R}}\circ\mathrm{TR}.$$

Определение 2. *η-инвариантом* краевой задачи $\mathcal{D}(p)\in\Psi_p(M)$ с параметром называется число

$$\eta\bigl(\mathcal{D}(p)\bigr)=\frac{1}{2\pi i}\mathrm{Tr}\bigl(\partial_p\mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}\bigr)\in\mathbb{C}.$$

Установим некоторые свойства η-инварианта.

Теорема 2.
1. (Логарифмическое свойство). Рассмотрим обратимые эллиптические задачи с параметром

$$\mathcal{D}(p)=\begin{pmatrix}D_0(p)\\ i^*B_0(p)\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathcal{D}}(p)=\begin{pmatrix}\widetilde{D}_0(p)\\ i^*\widetilde{B}_0(p)\end{pmatrix}\colon C^\infty(M,E)\longrightarrow\begin{array}{c}C^\infty(M,F)\\ \oplus\\ C^\infty(\partial M,G),\end{array}$$

где $\operatorname{ord} D_0 = \operatorname{ord} \widetilde{D}_0$, $\operatorname{ord} B_0 = \operatorname{ord} \widetilde{B}_0$ *и* $\text{тип}\, B_0 = \text{тип}\, \widetilde{B}_0$. *Имеет место равенство*

$$\eta(\mathcal{D}) - \eta(\widetilde{\mathcal{D}}) = \eta(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1});$$

2. (Формальный след). Отображение

$$\begin{aligned} \widetilde{\operatorname{Tr}}\colon \Psi_p(M) &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ \mathcal{D}(p) &\longmapsto \operatorname{Tr}\bigl(\partial_p \mathcal{D}(p)\bigr), \end{aligned}$$

называемое формальным следом, является следом на алгебре $\Psi_p(M)$, *т.е.* $\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB) = \widetilde{\operatorname{Tr}}(BA)$ *для всех элементов* $A, B \in \Psi_p(M)$. *Формальный след может быть явно вычислен;*

3. (Вариация η*-инварианта). Пусть* $\mathcal{D}_t(p)$, $t \in [0,1]$, *есть гладкая гомотопия обратимых эллиптических задач с параметром. Тогда производная* η*-инварианта по параметру* t *равна*

$$\partial_t \eta(\mathcal{D}_t) = \frac{1}{2\pi i} \widetilde{\operatorname{Tr}}\bigl(\mathcal{D}_t^{-1} \partial_t \mathcal{D}_t\bigr).$$

Предполагается, что построенный таким образом η-инвариант будет участвовать в формулах индекса на многообразиях с цилиндрическими концами и на областях с угловыми точками на границе (см. [2]). Также к исследованию η-инварианта краевых задач с параметром приводит проблема индекса некоторых нелокальных задач (см. [4]).

2 Опубликованные и поданные в печать работы.

Поданы в печать 2 работы:

1. Savin A. Yu., Zhuikov K.N. Eta-invariant for Parameter-Dependent Boundary Value Problems. *Mathematical Notes* — in print.

2. Жуйков К.Н., Савин А.Ю. Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром. *Современная математика. Фундаментальная направления.* — принята к печати.

3 Участие в конференциях и школах.

1) Международная Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы»(ВЗМШ-2023), 27 января – 1 февраля 2023 г., Воронеж, ВГУ.

2) Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2023», 10–21 апреля 2023 г., Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова.

3) Международная Воронежская весенняя математическая школа «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения» (ВВМШ-2023), 3–9 мая 2023 г., Воронеж, ВГУ.

4) Международная конференция «Нелокальные и нелинейные задачи», 23–28 октября 2023 г., Москва, РУДН.

4 Работа в научных центрах и международных группах.

Аспирант полного дня Математического института им. С.М. Никольского РУДН.

5 Педагогическая деятельность.

В качестве ассистента Математического института им. С.М. Никольского РУДН вел семинарские занятия по дисциплинам:

1) Линейная алгебра и геометрия, направление «Математика», 1 курс;

2) Математический анализ, направление «Математика», 2 курс;

3) Дифференциальные уравнения, направление «Прикладная математика и информатика», 2 курс;

4) Методы оптимизации, направление «Прикладная математика и информатика», 4 курс;

5) Mathematics (на английском языке), направление «Стоматология», 1 курс.

Список литературы

[1] *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Успехи матем. наук.— 1964.— *19*, № 3.— С. 53–161.

[2] *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Труды Моск. матем. об-ва.— 1967.— *16*.— Р. 209–292.

[3] *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач.— М: Москва, 1986.— 576 с.

[4] *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// УМН.— 2016.— *71*, № 5.— С. 801–906.

[5] *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М: Наука, 1978.— 279 с.

[6] *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1973.— 232 с.

[7] *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math.— 1971.— *126*.— P. 11–51.

[8] *Grubb G.* Functional calculus of pseudodifferential boundary problems.— Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 1996.— second edition.— x+522 pp.

[9] *Melrose R.* The eta invariant and families of pseudodifferential operators// Math. Research Letters.— 1995.— *2*, No. 5.— P. 541–561.