Отчет о выполнении проекта Грант «Аспирант или молодой ученый без степени — Математика»

ФИО Грантополучателя: Болбачан Василий Сергеевич

Номер договора: 22-7-5-2-1

Название проекта: Полилогарифмы и мотивные когомологии

Год выполнения проекта: первый год

1 Аннотация

В этом году я защитил диссертацию, основной результат который был опубликован в [1]. Это статья посвящена доказательству так называемого усиленного закона взаимности А. Суслина, высказанного в качестве гипотезы в [4].

При анализе структуры, возникающей при этом доказательстве был построен новый комплекс гипотетически вычисляющий мотивные когомологии. Хотя этот комплекс похож на комплекс вычисляющий высшие группы Чжоу, он обладает рядом преимуществ.

В препринте [2] я доказал ряд базовых свойств этого комплекса, а также доказал гипотезу Гончарова для этого комплекса в степенях $m-1, m$, где m — это мотивный вес. Таким образом для доказательства гипотезы Гончарова в этих степенях — цели этого проекта — осталось показать, что когомологии построенного мной комплекса изоморфны высшим группам Чжоу.

2 Подробный отчет за отчетный период

2.1 Введение

Определим комплекс $\Gamma(F, n)$ следующим образом:

$$\Gamma(F,m)\colon \mathcal{B}_m(F) \xrightarrow{\delta_m} \mathcal{B}_{m-1}(F) \otimes F^\times \xrightarrow{\delta_m} \ldots \xrightarrow{\delta_m} \mathcal{B}_2(F) \otimes \Lambda^{m-2} F^\times \xrightarrow{\delta_m} \Lambda^m F^\times.$$

Этот комплекс сосредоточен в степенях $[1, m]$. Группа $\mathcal{B}_m(F)$ как фактор свободной группы, порожденной символами $\{x\}_m, x \in \mathbb{P}^1(F)$ по некоторой подгруппе $\mathcal{R}_m(F)$, описывающей "универсальные"соотношения для n-логарифма (см. [3]).

Дифференциал определяется следующим образом: $\delta_n(\{x\}_k \otimes y_{k+1} \wedge \cdots \wedge y_n) = \{x\}_{k-1} \otimes x \wedge y_{k+1} \wedge \cdots \wedge y_n$ для $k > 2$ и $\delta_n(\{x\}_2 \otimes y_3 \wedge \ldots y_n) = x \wedge (1-x) \wedge y_3 \wedge \cdots \wedge y_n$.

Если (F, ν) — это поле дискретного нормирования, то в [3] было определено отображения вычета $\partial_\nu \colon \Gamma(F, m) \to \Gamma(\overline{F}_\nu, m-1)[-1]$ (где $\overline{F}_\nu$ — поле вычетов), которое должно соответствовать отображению вычета на мотивных когомологиях.

А. Гончаров сформулировал гипотезу, согласно которой когомологии этого комплекса совпадают с мотивными когомологиями поля. Целью этого проекта является доказательство этой гипотезы в степени $m-1$.

2.2 Поднятое отображение взаимности

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. Пусть X — это гладкое многообразие над K и D — неприводимый дивизор на X. Обозначим через ν_D дискретное нормирование, соответствующее D. Мы будем использовать обозначение ∂_D для отображения ∂_{ν_D}.

Пусть X гладкая собственная кривая над K. Для точки $x \in X(K)$ имеется отображение

$$\partial_x \colon \tau_{\geq m}\Gamma(K(X), m+1) \to (\tau_{\geq m-1}\Gamma(K, m))[-1].$$

В этой формуле $\tau_{\geq m}$ — это каноническое обрезание.

Обозначим через

$$Tot_X \colon \tau_{\geq m}\Gamma(K(X), m+1) \to (\tau_{\geq m-1}\Gamma(K, m))[-1]$$

сумму этих отображений, взятых по всем точкам $x \in X(k)$. Определение строго регулярного элемента может быть найдено в [2].

Теорема 2.1. *Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. Каждой гладкой собственной кривой X над K можно сопоставить каноническое отображение*

$$\mathcal{H}_X \colon \Lambda^{m+1}K(X)^\times \to \Gamma(K, m)_{m-1}/\operatorname{Im}(\delta_m)$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

1. *Отображение $\mathcal{H}_X$ задает гомотопию между Tot_X и нулевым отображением*

2. *Имеем:*
$$\mathcal{H}_X(f_1 \wedge f_2 \wedge c_3 \wedge \cdots \wedge c_{m+1}) = 0$$
В этой формуле $f_1, f_2 \in K(X)$ и $c_i \in K$.

3. *Для любого непостоянного отображения $\varphi \colon X \to Y$ имеем*
$$\mathcal{H}_Y(a) = 1/\deg(\varphi)\mathcal{H}_X(\varphi^*(a)).$$

4. *Имеем:*
$$\mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}(t \wedge (1-t) \wedge (1-a/t) \wedge c_4 \wedge \cdots \wedge c_{m+1}) = -\{a\}_2 \otimes c_4 \wedge \cdots \wedge c_{m+1}.$$

5. *Пусть S — гладкая собственная поверхность. Предположим, что элемент $b \in \Lambda^{m+2}(S)$ является строго регулярным во всех точка. Имеем*
$$\sum_{C \subset S} \mathcal{H}_C\, \partial_C(b) = 0.$$

Более того, семейство отображений $\mathcal{H}_X$ однозначно определяется свойствами, перечисленными выше.

Для $m = 2$, это утверждение было высказано в качестве гипотезы в [4]. Доказательство этого частного случая составляет содержание статьи [1]. Общий случай доказан в препринте [2].

2.3 Некоторый аналог высших групп Чжоу

Сформулируем основные результаты препринта [2]

Определение 2.2. Пусть X — алгебраическая схема над K и m, j целые неотрицательные числа. Положим $p = \dim X + m - j$ и $n = 2m - j$. Обозначим через $\widetilde{\Lambda}(X, m)_j$ векторное пространство с базисом занумерованным классами изоморфизма троек (Y, a, f), где: Y — это многообразие над K размерности p p, $f\colon Y \to X$ — собственный морфизм и $a \in \Lambda^n(K(Y)^\times)$. Обозначим через $[X, a, f] \in \widetilde{\Lambda}(X, m)_j$ соответствующий базисный элемент. Обозначим через $\Lambda(X, m)_j$ фактор пространства $\widetilde{\Lambda}(X, m)_j$ по следующему соотношению:

$$[\widetilde{Y}, \varphi^*(a), f \circ \varphi] = (\deg \varphi)[Y, a, f].$$

В этой формуле $\varphi\colon \widetilde{Y} \to Y$ произвольный собственный доминантный морфизм конечной степени. Отображение φ^* определяется по формуле $\varphi^*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n) = \varphi^*(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(\alpha_n)$.

На комплексе $\Lambda(X, m)_*$ можно определить дифференциал, который задается отображением ручного символа, определенного А. Гончаровым в [3].

Основной результат [2] заключается в следующих двух теоремах:

Теорема 2.3. *Комплекс $\Lambda(X, m)$ корректно определен. Он удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *(Функториальность) Комплекс $\Lambda(\cdot, m)$ ковариантно функториален для собственных морфизмов и контравариантно функториален для плоских морфизмов.*

2. *(Локализация) Пусть Z замкнутое подмножество в X, имеющее коразмерность k. Обозначим через i каноническое вложение $Z \hookrightarrow X$ и через j комплементарное открытое вложение $U \hookrightarrow X$. Имеет место следующая точная последовательность комплексов:*

$$0 \to \Lambda(Z, m-k)[-2k] \xrightarrow{i_*} \Lambda(X, m) \xrightarrow{j^*} \Lambda(U, m) \to 0.$$

3. *Обозначим через $z^m(X, 2m - *)$ — комплекс вычисляющий кубические группы Чжоу в весе m. Определен канонический морфизм комплексов*

$$z^m(X, 2m - *) \to \Lambda(X, m)_*.$$

Обозначим полилогарифмический комплекс поля K через $\Gamma(K, m)$.

Определим морфизм комплексов

$$\mathcal{T}_{\geq m-1}(m) \colon \tau_{\geq m-1}\Gamma(K, m) \to \tau_{\geq m-1}\Lambda(K, m)$$

следующим образом. Элемент $\{a\}_2 \wedge c_3 \wedge \cdots \wedge c_m$ переходит в

$$[\mathbb{P}^1, t \wedge (1-t) \wedge (1-a/t) \wedge c_3 \wedge \cdots \wedge c_m].$$

Элемент $c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$ переходит в $[\operatorname{Spec} K, c_1 \wedge \cdots \wedge c_m]$.

Теорема 2.4. *Пусть K — поле характеристики ноль. Отображение $\mathcal{T}_{\geq m-1}(m)$ является квази-изоморфизмом. В частности для $j = m-1, m$ мы получаем*

$$H^j(\Lambda(\operatorname{Spec} K, m)) \cong H^j(\Gamma(K, m)).$$

Более того, если поле K является алгебраически замкнутым, то отображение $\mathcal{T}_{\geq m-1}(m)$ является изоморфизмом комплексов.

Таким образом для доказательства гипотезы Гончарова в степени $m-1$ осталось показать что отображение

$$z^m(X, 2m - *) \to \Lambda(X, m)_*$$

является квази-изоморфизмом. По-видимому это можно сделать подобно тому как в [5] доказывается что симплициальные группы Чжоу изоморфны кубическим.

На данный момент происходит подготовка препринта [2] к подаче в журнал Advances in Mathematics.

3 Публикации

3.1 Публикации в рецензируемых журналах

1. V. Bolbachan. Chow dilogarithm and strong suslin reciprocity law. *Journal of algebraic geometry*, 32(4):697–728, 2023.

3.2 Остальные публикации по результатам проекта

1. V. Bolbachan. On some analog of Bloch's higher Chow group and Goncharov's conjecture in next to Milnor degree. *arxiv preprint*, *arxiv.org/abs/2311.07567*, 2023.

4 Участие в научных мероприятиях, стажировках, научном сотрудничестве и т.п., за отчетный период:

Сделаны доклады на следующих семинарах:

1. Introduction to polylogarithms - I, II. *Working Seminar on Mathematical Physics, Scoltech*

2. О дзета-функции вещественно квадратичных полей. *Семинар "Автоморфные формы и их приложения", матфак НИУ ВШЭ*

На данный момент являюсь научным сотрудником Лаборатории "Теории Представлений и Математической Физике"на матфаке НИУ ВШЭ.

В этом учебном году я провожу семинары по Алгебре-3 на математическом факультете высшей школы экономики. В прошлом году я вел семинары по геометрии на 1 курсе совместного бакалавриата НИУ ВШЭ и Центра Педагогического Мастерства, а также вел семинары по теории чисел.

5 Период обучения в аспирантуре

Я закончил аспирантуру 01.11.2022

6 Защита диссертации

В этом году я защитил кандидатскую диссертацию.

Название диссертации: "О структуре К — групп эллиптических кривых"

Дата защиты: 24.05.2023.

Ссылка на страницу с информацией о защите: `www.hse.ru/sci/diss/803973662`

7 Основное место работы

Сколковский Институт Науки и Технологий, Центр Передовых Исследований им. И. Кричевера, научный сотрудник.

8 План работ на следующий отчетный период

На данный момент доказано, что когомологии комплекса $\Lambda(K, m)$ в степени $m-1$ совпадают с когомологиями полилогарифмического комплекса. Таким образом, для доказательства гипотезы Гончарова в степени $m-1$ осталось показать, что естественное отображение из комплекса вычисляющего высшие группы Чжоу в комплекс $\Lambda(X, m)$ является квазиизоморфизмом. По-видимому для этого достаточно показать, что когомологии комплекса $\Lambda(X, m)$ является гомотопически инвариантным и функториальным относительно произвольных отображений между гладкими многообразиями.

После того, как это будет сделано, я хочу применить полученную технику для доказательства гипотезу Бейлинсона-Суле в степени 0 и весе 2. Это было бы особенно интересно, так как этот результат являлся бы применением теории полилогарифмов к классической задаче, в формулировке которой полилогарифмы не участвуют.

Подпись грантополучателя: Болбачан В.Е.

Подпись научного руководителя грантополучателя: Левин А.М.

Дата заполнения: 15.11.2023

Список литературы

[1] V. Bolbachan. Chow dilogarithm and strong suslin reciprocity law. *Journal of algebraic geometry*, 32(4):697–728, 2023.

[2] V. Bolbachan. On some analog of Bloch's higher Chow group and Goncharov's conjecture in next to Milnor degree. *arxiv.org/abs/2311.07567*, 2023.

[3] A. B. Goncharov. Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology. *Advances in Mathematics*, 114(2):197–318, 1995.

[4] A. B. Goncharov. Polylogarithms, regulators and Arakelov motivic complexes. *Journal of the American Mathematical Society*, 18(1):1–60, 2005.

[5] M. Levine. Bloch's higher Chow groups revisited. *Astérisque*, 226(10):235–320, 1994.