ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ПРОЕКТА
(Грант «Кандидат или доктор наук — Математика»)

1. ФИО Грантополучателя: *Соломадин Григорий Дмитриевич*

2. Номер договора: 22-7-3-5-1

3. Название проекта: Обобщения в торической топологии: формула Хохстера и эквивариантные векторные расслоения

4. Год выполнения проекта: (первый, второй или третий): первый

5. Аннотация:

(Кратко описать проведенные исследования и сформулировать полученные за отчетный период результаты. Не более 1/4 страницы)

Разработан метод изучения когомологий гомотопических копределов торических диаграмм на основе когомологий пучков над конечными топологическими пространствами. Получены обобщения следующих результатов в торической топологии (подробнее см. ниже): вырождение спектральной последовательности Данилова для торических многообразий; формула типа Хохстера для факторов момент-угол комплексов для раскрасок вершин (Ю Ли); формула для чисел Бетти неособых торических многообразий. В случае диаграммы D в категории T-пространств (где T есть компактный тор) данный метод сравнивается с Tor-группами (т. е. вторым листом с.п. Эйленберга-Мура соответствующего расслоения Бореля) с помощью введенной автором спектральной последовательности. В случае коэн-маколеевых частичных множеств доказано вырождение спектральной последовательности для орбитной фильтрации на hocolim D. Автором даны новые явные формулы для модулей эквивариантных когомологий по несвободным действиям тора на момент-угол комплексах (для введенных им дистрибутивных факторов).

6. Подробный отчет за отчетный период:

(1-3 страницы. В свободной форме, но содержащий:

- описание проведенных исследований

Проведенное исследование посвящено изучению групп когомологий топологических пространств, допускающих гомотопическое разложение в виде гомотопического копредела торической диаграммы над произвольным клеточным частично упорядоченным множеством P. Получена формула для когомологий hocolim D в терминах когомологий рафинации копучков H^*(D), H^*(BD) над P. Методами доказательства этой формулы являются формальность диаграмм, симплициальные модели для торов и их классифицирующих диаграмм, и когомологическая спектральная последовательность Боусфилда-Кана. Приложения данной формулы включают в себя обобщения известных теорем в торической геометрии и топологии (см. ниже). В случае диаграммы с действием тора T над коэн-маколеевым P (Стэнли), доказано вырождение спектральной последовательности орбитной фильтрации на hocolim D на втором листе.

- полученные результаты

Во-первых, в случае диаграммы D с действием тора T над коэн-маколеевым P, доказано вырождение спектральной последовательности фильтрации по типу орбит на hocolim D на втором листе. Группы этого листа совпадают с клеточными гомологиями с коэффициентами в соответствующих копучках. В качестве следствия, получено обобщение теоремы о вырождении (аддитивном) спектральной последовательности Данилова для торических многообразий (с целыми коэффициентами). Доказательство Данилова опиралось на методы теории Ходжа (и для когомологий с комплексными коэффициентами). Он задал в своей статье вопрос о более глубокой причине полученного вырождения. Автором доказано, что для любого полного торического многообразия X когомологии H^*(X;\Z) изоморфны прямым суммам клеточных гомологий с коэффициентами в копучках. Данные группы гомологий совпадают с группами второго листа спектральной последовательности Данилова после умножения коэффициентов на \C. Обобщением спектральной последовательности Данилова для целых коэффициентов здесь выступает спектральная послоедовательность орбитной фильтрации на X. Методом доказательства является вырождение спектральной последовательности Зимана-МакКрори для коэн-маколеева частично упорядоченного множества, и описанный выше результат.

Здесь отметим, что гипотеза Бухштабера (упомянутая в заявке для текущего проекта) о сохранении свойства «когомологии без кручения» при переходе к последовательным частичным факторам оказалась неверна. Соответствующий пример был сообщен М. Францем автору в ходе обсуждения по почте.

Во-вторых, это формула Хохстера и ее ранее известное обобщение, полученное в статье Ю Ли для одного класса факторов момент-угол комплекса Z_K по под-тору в естественно действующем торе T=T^m, где m это количество вершин симплициального комплекса K. Доказательство Ю Ли опиралось на существование явной клеточной структуры на таких факторпространствах. Эта клеточная структура приводила к определению мультистепени на соответствующих клеточных когомологиях. Фактор любого момент-угол комплекса Z_K (полиэдральной степени вида (D^2,S^1)^K) по любой замкнутой подгруппе H в естественно действующем торе T^m имеет гомотопическое разложение для торической диаграммы Q=Q(K,H) (Лимонченко и Соломадин). Формула автора для когомологий hocolim Q дана в терминах когомологий рафинации копучка H^*(Q), все стрелки которогоономорфны. Имеет смысл говорить о дистрибутивности диаграммы H^1(Q;\Q), так как данный копучок однозначно задается набором \Q-подпространств в H^1(L;\Q), где L=T/H. Автором изучены и классифицированы все дистрибутивные мономорфные копучки, и все замкнутые подгруппы H, соответствующие им. В соответствующих когомологиях внешней степени дистрибутивного копучка возникает разложение, аналогичное мультистепени на клеточных когомологиях. Оно приводит к обобщению формулы типа Хохстера (совпадающей с формулой Ю Ли). Класс подгрупп в торе, соответствующих дистрибутивным мономорфным копучкам, чуть более широкий, чем класс Ю Ли. Далее, получена новая формула для модулей когомологий Бореля любого из таких факторов. В частности, возникающие копучки не ацикличны, что дает отрицательный ответ на вопрос из статьи Лимонченко-Соломадина.

В-третьих, это спектральная последовательность Эйленберга-Мура для частичных факторов момент-угол комплексов. Напомним, что известно ее вырождение во втором слое (Бухштабер-Панов, Франц). Это вырождение приводит к описанию когомологий в терминах Tor-групп кольца Стэнли-Райснера Z[K], однако даже в таком случае явное вычисление остается сложной задачей. Для любой торической P-диаграммы D в T-пространствах автором введена спектральная последовательность, стартующая с цели с.п. Эйленберга-Маклейна слоя расслоения Бореля для T-пространства hocolim D, сходящаяся к спектральной последовательности Боусфилда-Кана. В случае вырождения данной спектральной последовательности (например, для эквивариантно формальных частичных факторов) автором явно посчитаны числа Бетти для hocolim D.

- оценка новизны и актуальности полученных результатов)

Указанные выше результаты являются новыми значительными обобщениями результатов из торической геометрии и топологии, таким как: когомологии торических многообразий (Данилов), формула Хохстера (Хохстер, Бухштабер-Панов, Ю Ли), и т. д. В статье Велкер-Циглер-Живальевич анонсировано описание для когомологий торических многообразий в терминах вырождения спектральной последовательности Данилова (с коэффициентами в \C) без доказательства. Общий результат автора применим к торическим многообразиям, так как они допускают разложение для торической диаграммы, и так как частично упорядоченное множество орбит (описываемое соответствующим веером) коэн-маколеево. Отметим, что здесь рассматриваются торические многобразия, соответствующие произвольным полным рациональным веерам (в т.ч. не симплициальным). Данная формула есть частный случай вырождения (также доказанного автором) для спектральной последовательности орбитной фильтрации (при условии коэн-маколеевости). Вырождение было известно в случае многообразий с действием тора при условии ацикличности граней пространства орбит (см. Айзенберг). Доказанный автором результат является естественным обобщением этой теоремы в классе топологических пространств с действием тора со стягиваемым пространством орбит, являющимся регулярным CW-комплексом. Далее, результат автора приводит к описанию когомологий факторов любого момент-угол комплекса по любой замкнутой подгруппе в естественно действующем торе (в силу гомотопического разложения Лимонченко и Соломадина). Это описание имеет место в случае, когда P это малая категория некоторого симплициального комплекса, или симплициально (Жи Лю-Панов). В более общей ситуации момент-угол комплекса над произвольным частично упорядоченным множеством, определенного Кишимото, не ясно, как определить действие тора. Отметим, что ранее описание в терминах Tor-групп (лишь в случае частичных факторов) было наиболее общим описанием для когомологий. Полученное описание работает в более общей ситуации, и позволяет применять методы типа последовательности Майера-Виеториса для пучков. Полученные результаты представлены на различных исследовательских семинарах и научных конференциях Японии и Франции. Все сказанное выше подтверждает актуальность и новизну данных результатов.

7. ПУБЛИКАЦИИ

(Для всех нижеприведенных подпунктов указывать в формате:

На английском или русском языках. Указать полный список авторов, название публикации, журнал и выходные данные публикации, включая год публикации, интернет-адрес публикации, интернет-ссылку на данную публикацию на ресурсе arXiv.org (если имеется). Если авторов более 5, указать только первого автора и общее число авторов. Для всех публикаций указать тип публикации (обзор, препринт, труды конференции, и т.п.). Публикации должны быть сгруппированы по типу (препринты/труды конференции и т.п.)

7.1. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за отчетный период (12 месяцев):**

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.2. Остальные публикации по результатам проекта **за отчетный период (12 месяцев):**

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и. т. п.)

«Borel-Hirzebruch type formula for the graph equivariant cohomology of a projective bundle over a GKM-graph», S.Kuroki, G. Solomadin, preprint: https://arxiv.org/abs/2207.11380

«Cohomology of torus actions with acyclic orbit spaces», G. Solomadin, preprint in preparation.

7.3. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.1. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.4. Остальные публикации по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.2. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и. т. п.)

7.5. Иные публикации за весь срок выполнения проекта (в т.ч. публикации, не связанные с темой проекта):

(В данном пункте указываются публикации, не упомянутые ни в одном из пунктов выше)

«On independent GKM-graphs without nontrivial extensions», G. Solomadin, Boletin de la Sociedad Matem´atica Mexicana (accepted), available at arXiv:2205.07197[math.CO].

8. Участие в научных мероприятиях, стажировках, научном сотрудничестве и т.п., за отчетный период:

(Для каждого мероприятия укажите: даты приезда/отъезда, название и тип мероприятия, организацию, город, страну. Если применимо, укажите дату и название доклада.)

Февраль - август 2023: Исследовательский визит к профессору S.Kuroki, Okayama University of Science, Окаяма, Япония.

22–26 июля, 2023: Исследовательский визит к профессору K. Kuribayashi, Shinshu University, Мацумото, Япония.

Сентябрь 2023 - август 2024: Пост-докторантура, Strasbourg University, Страсбург, Франция.

7 апреля, 2023: Geometry Seminar, Kagawa University, Такамацу, Япония (очный доклад).

9 апреля, 2023: Himeji Seminar on Geometry of Group Actions, Egret Himeji, Химедзи, Япония (очный доклад).

23 июня, 2023: Handayama Seminar on Geometry and Algebra, Okayama University of Science, *Окаяма, Япония (очный доклад).*

12 сентября, 2023: Expos´e de la demi-journ´ee de l’´equipe, IRMA, University of Strasbourg, Страсбург, Франция (очный доклад).

3 октября, 2023: Journ´ee de retr´ee IRMA, IRMA, University of Strasbourg, Страсбург, Франция (очный доклад).

9. Основное место работы в настоящее время, должность: постдокторант в Институте Перспективных Математических Исследований Университета Страсбурга, Франция. (Postdoctoral research fellow at Strasbourg University, IRMA, France.)

10. План работ на следующий отчетный период:

(Описать планируемые исследования, их цели и ожидаемые результаты. Для отчета за последний год выполнения проекта не заполняется)

Решением Фонда Базис текущий проект завершается в текущем году.

Тем не менее, в следующем году планируется подготовка и выход препринта по теме проекта и подача текста в рецензируемый научный журнал. Планируется получить описание класса пространств с действием тора, допускающих гомотопическое разложение для некоторой торической диаграммы. (Гипотетически, это T-пространства с ацикличным регулярным CW-пространством орбит.) Планируется исследовать обобщения полученных результатов для т.н. орбитных диаграмм, т.е. гомотопических копределов (в топологических пространствах) диаграмм в категории групп Ли (для когомологий с рациональными коэффициентами) с помощью сингулярных моделей Картана. Имеется надежда построить удобную рациональную модель для гомотопического копредела из этого класса, для изучения свойства формальности и произведений Масси в его когомологиях. Совместный проект с Ш. Куроки далее планируется проводить в двух направлениях: обобщения GKM-многообразий для периодичных бесконечных GKM-графов, и гомологии пересечений пространств орбит действий торов на однородных пространствах.

Подпись Грантополучателя______________

Дата заполнения 11/6/2023