

**ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ПРОЕКТА
(Грант «Кандидат или доктор наук — Математика»)**

1. ФИО Грантополучателя: *Степанова Мария Александровна*

2. Номер договора: 22-7-3-4-1

3. Название проекта: Симметрия вещественных подмногообразий комплексного пространства

4. Год выполнения проекта: первый

5. Аннотация:

(Кратко описать проведенные исследования и сформулировать полученные за отчетный период результаты. Не более 1/4 страницы)

Для широкого и естественного подкласса вещественных гиперповерхностей комплексного пространства доказана гипотеза о размерности. А именно, показано, что в выбранном классе самыми богатыми конечномерными алгебрами инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов обладают невырожденные гиперквадрики.

Получена реализация алгебр Ли автоморфизмами CR -многообразий и симметриями дифференциальных уравнений.

6. Подробный отчет за отчетный период:

(1-3 страницы. В свободной форме, но содержащий:

- описание проведенных исследований*
- полученные результаты*
- оценка новизны и актуальности полученных результатов)*

Для широкого и естественного подкласса вещественных гиперповерхностей комплексного пространства доказана гипотеза о размерности. Гипотеза о размерности в CR -геометрии - это вопрос с долгой и богатой историей. В самой общей формулировке для вещественно-аналитических многообразий произвольной коразмерности гипотеза оказалась неверной при $k > 1$. Однако для гиперповерхностей, т.е. для $k = 1$, гипотеза остается открытой. Приведем ее формулировку для этого случая, который исторически возник первым и, по существу, послужил основой для более общих гипотез.

Гипотеза о размерности ($k = 1$): 1) Размерность алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов ростка голоморфно невырожденной вещественно-аналитической гиперповерхности в S^N не превосходит $N^2 + 2N$, т.е. размерности алгебры автоморфизмов любой из невырожденных гиперквадрик в S^N .

2) При этом максимум размерности алгебры автоморфизмов достигается только на гиперквадриках.

Мы доказываем данную гипотезу для некоторого естественного и широкого класса гиперповерхностей, которые допускают взвешенно однородную голоморфно невырожденную модельную поверхность. Это означает, что при некотором выборе весов координат младшая весовая компонента определяющего уравнения данной поверхности задает голоморфно невырожденную гиперповерхность. Невырожденные поверхности

можно рассматривать как обобщение класса Леви-невырожденных поверхностей. При этом многие свойства Леви-невырожденных поверхностей переносятся и на эту более общую ситуацию. Например, размерность алгебры автоморфизмов взвешенной модельной поверхности оценивает сверху размерность всякой невырожденной гиперповерхности с такой модельной поверхностью. И поэтому, в частности, для оценки размерностей алгебр автоморфизмов невырожденных поверхностей достаточно оценить размерности взвешенно однородных поверхностей.

Мы пользуемся тем, что голоморфная невырожденность эквивалентна конечной невырожденности в общей точке гиперповерхности, а потому можно сопоставить гиперповерхности набор биголоморфных инвариантов l -тип. При этом по l -типу можно выбрать удобную систему координат, в которой определяющее уравнение принимает достаточно простой вид (приведенная форма). Далее мы применяем теорему Колара, Мейлан и Зайцева, которая описывает структуру алгебры инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов для взвешенно однородной невырожденной гиперповерхности и с помощью приведенной формы уравнения оцениваем размерность этой алгебры.

Также мы доказываем, что для произвольной конечномерной вещественной алгебры Ли существует система уравнений в частных производных с алгеброй симметрий, изоморфной комплексификации данной алгебры. Основным инструментом здесь — это многообразия Сегре, являющиеся мостом между теорией уравнений в частных производных и CR-геометрией. Сначала мы строим росток CR-многообразия с заданной алгеброй инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов (отметим, что утверждения такого типа были получены в ряде работ: например, А.Е. Туманов и Г.Б. Шабат (1990) реализовали произвольную алгебру Ли голоморфными автоморфизмами ограниченной области, а в работе Й. Винкельмана (2002) произвольная алгебра Ли реализована голоморфными автоморфизмами многообразий Штейна). Затем с помощью техники, восходящей к Э. Картану и Б. Сегре, мы получаем систему уравнений с нужными симметриями. Отметим, что произвольную конечномерную алгебру Ли можно реализовать даже автоморфизмами вещественно-аналитической гиперповерхности, т.е. CR-многообразия коразмерности один. Мы приводим конкретные примеры таких гиперповерхностей.

Результаты дают ответы на актуальные и естественные в контексте CR-геометрии вопросы и являются новыми.

7. ПУБЛИКАЦИИ

(Для всех нижеприведенных подпунктов указывать в формате:

На английском или русском языках. Указать полный список авторов, название публикации, журнал и выходные данные публикации, включая год публикации, интернет-адрес публикации, интернет-ссылку на данную публикацию на ресурсе arXiv.org (если имеется). Если авторов более 5, указать только первого автора и общее число авторов. Для всех публикаций указать тип публикации (обзор, препринт, труды конференции, и т.п.). Публикации должны быть сгруппированы по типу (препринты/труды конференции и т.п.)

7.1. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта за отчетный период (12 месяцев):

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.2. Остальные публикации по результатам проекта за отчетный период (12 месяцев):

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и т. п.)

1. М. А. Степанова, “Реализация произвольных алгебр Ли автоморфизмами CR-многообразий и симметриями дифференциальных уравнений”, Изв. РАН. Сер. матем., 88:2 (2024) (статья, в печати)

7.3. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.1. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.4. Остальные публикации по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.2. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и. т. п.)

7.5. Иные публикации за весь срок выполнения проекта (в т.ч. публикации, не связанные с темой проекта):

(В данном пункте указываются публикации, не упомянутые ни в одном из пунктов выше)

1. Мария А. Степанова, “Отношение предпорядка на множестве аналитических функций”, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 16:5 (2023), 681–689 (статья),
https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=jsfu&paperid=1115&option_lang=rus

8. Участие в научных мероприятиях, стажировках, научном сотрудничестве и т.п., за отчетный период:

(Для каждого мероприятия укажите: даты приезда/отъезда, название и тип мероприятия, организацию, город, страну. Если применимо, укажите дату и название доклада.)

1. 27 сентября 2023 г., Семинар по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина), МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия, доклад “Гипотеза о размерности для гиперповерхностей”

2. 11-15 сентября 2023 г., Конференция по комплексному анализу и его приложениям, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия, доклад “Гипотеза о размерности для гиперповерхностей”

3. 5 апреля 2023 г., Семинар по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина), МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия, доклад “Отношение предпорядка на множестве аналитических функций двух комплексных переменных”

4. 13-17 марта 2023 г., Конференция "Молодежный забег МЦМУ МИАН", МЦМУ МИАН, Москва, Россия, доклад “What is CR geometry?”

5. 14 сентября 2023 г., подготовка отзыва на кандидатскую диссертацию С.В. Феклистова и выступление в качестве официального оппонента, Сибирский федеральный университет, Красноярск, Россия.

9. Основное место работы в настоящее время, должность: МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, кафедра теории функций и функционального анализа, ассистент.

10. План работ на следующий отчетный период:

(Описать планируемые исследования, их цели и ожидаемые результаты. Для отчета за последний год выполнения проекта не заполняется)

В CR-геометрии широко известна конструкция Пуанкаре, которая позволяет оценить размерность стабилизатора алгебры Ли инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов роста CR-многообразия через размерность стабилизатора соответствующей алгебры

модельной поверхности этого ростка. Долго остается без ответа следующий естественный вопрос: существует ли алгебраическая версия конструкции Пуанкаре, т.е. верно ли, что стабилизатор алгебры автоморфизмов ростка CR -многообразия вкладывается в стабилизатор алгебры его модельной поверхности в качестве подалгебры Ли, а не просто как векторное пространство. Планируется выяснить, существует ли такая конструкция, т.е. либо привести пример ростка CR -многообразия, стабилизатор алгебры Ли автоморфизмов которого не изоморфен никакой подалгебре стабилизатора алгебры его модельной поверхности, либо предложить саму конструкцию.

Недавно В.К. Белошапкой было замечено, что классическую конструкцию Пуанкаре можно обобщить и получить оценку размерности всей алгебры автоморфизмов через размерность всей алгебры модельной поверхности. Возникает аналогичный вопрос о вложении для всей алгебры автоморфизмов ростка в алгебру модельной поверхности. Планируется исследовать данный вопрос также и для полной алгебры.

Планируется также адаптировать метод модельной поверхности для многообразий, не допускающих взвешенно однородной невырожденной модельной поверхности ни при каком выборе весов координат.

Планируемые исследования нацелены на развитие метода модельной поверхности, который является удобным инструментом изучения вещественных подмногообразий комплексного пространства.

Подпись Грантополучателя _____

Дата заполнения _____