

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ПРОЕКТА
(Грант «Аспирант или молодой ученый без степени — Математика»)

1. ФИО Грантополучателя: *Викулова Анастасия Вадимовна*
2. Номер договора: 22-7-5-3-1
3. Название проекта: Группа бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери-Брауэра над полем рациональных чисел
4. Год выполнения проекта (первый, второй, третий): первый
5. Аннотация:

(Кратко описать проведенные исследования и сформулировать полученные за отчетный период результаты. Не более 1/4 страницы)

В отчетный период было показано, что конечные подгруппы группы бирациональных автоморфизмов для нетривиальных поверхностей Севери—Брауэра над полем рациональных чисел являются только тривиальная, группа порядка 3 и произведение двух групп порядка 3.

6. Подробный отчет за отчетный период:

(1-3 страницы. В свободной форме, но содержащий:

- описание проведенных исследований*
- полученные результаты*
- оценку новизны и актуальности полученных результатов)*

В отчетный период была изучена группа бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери—Брауэра. Сама по себе группа бирациональных автоморфизмов является чрезвычайно сложным объектом для изучения хотя бы потому, что она даже не является алгебраической. Даже изучение «свойств конечности» для подгрупп группы бирациональных автоморфизмов является катастрофически трудной задачей. Тем не менее, она кажется вполне осуществимой для некоторых отдельных случаев.

Например, в статье Ж.-П. Серра (A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. *Mosc. Math. J.* 9 (2009), no. 1, 183–198) было дано понятие жордановости группы. Это свойство пришло из теоремы Жордана о том, что над полем комплексных чисел линейная группа является жордановой. В упомянутой статье было показано, что группа Кремоны ранга 2, то есть группа бирациональных автоморфизмов проективной поверхности над полем характеристики 0 является жордановой. Это значит, что группа Кремоны ранга 2 над полем характеристики 0 удовлетворяет следующему свойству: существует такая константа J , что любая конечная подгруппа в группе обладает нормальной абелевой подгруппой индекса не больше чем J .

Далее свойство жордановости групп бирациональных автоморфизмов активно изучалась многими математиками специализирующимися в области бирациональной геометрии. В частности, в статье Ю.Г.Прохорова и К.А.Шрамова (Свойство Жордана для группы Кремоны над конечным полем, *Алгебра, арифметическая, алгебраическая и комплексная геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Алексея Николаевича Паршина, Труды МИАН, 320, МИАН, М., 2023, 298–310*) было показано, что группа Кремоны ранга 2 над конечными полями являются жордановыми. При этом нельзя не отметить, что в упомянутой работе Ю.Г.Прохорова и К.А.Шрамова и в работе А.В.Викуловой (Константа Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечным полем, *Матем. Заметки, 113:4 (2023), 607–612*) были явно вычислены константы Жордана J для всех конечных полей.

Что касается поля рациональных чисел, то Е.А.Ясинский в работе (The Jordan constant for Cremona group of rank 2. *Bull. Korean Math. Soc.* 54 (2017), no. 5, 1859–1871) нашел явную константу Жордана J для группы Кремоны ранга 2, которая оказалась равна 120. Стоит

упомянуть также, что в той же работе были найдены константы Жордана для группы Кремоны ранга 2 над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и для поля действительных чисел, которые равны 7200 и 120, соответственно.

Проективная поверхность является тривиальной поверхностью Севери—Брауэра. Поэтому само собой разумеющимся является также изучение свойств группы бирациональных автоморфизмов поверхности Севери—Брауэра и насколько ее свойства разнятся со свойствами группы Кремоны ранга 2. В работе К.А.Шрамова (Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces, Eur. J. Math., 7:2 (2021), 591–612) было показано, что конечная подгруппа в группе бирациональных автоморфизмов нетривиальной поверхности Севери—Брауэра над полем рациональных чисел содержится в произведении трех групп порядка 3. В частности, из этого следует, что группа бирациональных автоморфизмов нетривиальной поверхности Севери—Брауэра над полем рациональных чисел жорданова и ее константа Жордана равна 1. В другой статье К.А.Шрамова (Birational automorphisms of Severi–Brauer surfaces. Sb. Math., 211 (2020), no. 3, 466–480) было показано, что константа Жордана не превосходит 3 для аналогичного случая, но для любого поля характеристики 0.

В отчетный период было продолжено изучение конечных подгрупп группы бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери—Брауэра, начало которому было дано в вышеупомянутых статьях К.А.Шрамова. Был улучшен результат статьи (Finite groups acting on Severi–Brauer surfaces, Eur. J. Math., 7:2 (2021), 591–612), то есть показано, что конечная группа является подгруппой в группе бирациональных автоморфизмов нетривиальной поверхности Севери—Брауэра над полем рациональных чисел тогда и только тогда когда она содержится в произведении двух групп порядка 3. Более того, был также изучен вопрос о 3-группах в группе автоморфизмов и группе бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери—Брауэра (не обязательно нетривиальных) над произвольным полем характеристики 0. Был получен следующий результат: если поле характеристики 0 имеет нетривиальный корень третьей степени из 1, то группа бирациональных автоморфизмов содержит произведение трех групп порядка три, но не содержит произведение четырех групп порядка три, а группа автоморфизмов содержит произведение двух групп порядка три, но не содержит произведение трех групп порядка три; если же поле характеристики 0 не имеет нетривиальный корень третьей степени из 1, то группа бирациональных автоморфизмов содержит произведение двух групп порядка три, но не содержит произведение трех групп порядка три, а группа автоморфизмов содержит подгруппу порядка три, но не содержит произведение двух групп порядка три.

7. ПУБЛИКАЦИИ

(Для всех нижеприведенных подпунктов указывать в формате:

На английском или русском языках. Указать полный список авторов, название публикации, журнал и выходные данные публикации, включая год публикации, интернет-адрес публикации, интернет-ссылку на данную публикацию на ресурсе arXiv.org (если имеется). Если авторов более 5, указать только первого автора и общее число авторов. Для всех публикаций указать тип публикации (обзор, препринт, труды конференции, и т.п.). Публикации должны быть сгруппированы по типу (препринты/труды конференции и т.п.)

7.1. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за отчетный период (12 месяцев):**

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.2. Остальные публикации по результатам проекта **за отчетный период (12 месяцев):**

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и т. п.)

A. V. Vikulova, Birational automorphism groups of Severi–Brauer surfaces over the field of rational numbers, 2022 (Published online) , 18 pp., arXiv: 2211.11456 (<https://arxiv.org/abs/2211.11456>)

7.3. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.1. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.4. Остальные публикации по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.2. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и. т. п.)

7.5. Иные публикации за весь срок выполнения проекта (в т.ч. публикации, не связанные с темой проекта):

(В данном пункте указываются публикации, не упомянутые ни в одном из пунктов выше)

А. В. Викулова, “Константа Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечным полем”, Матем. заметки, 113:4 (2023), 607–612

8. Участие в научных мероприятиях, стажировках, научном сотрудничестве и т.п., за отчетный период:

(Для каждого мероприятия укажите: даты приезда/отъезда, название и тип мероприятия, организацию, город, страну. Если применимо, укажите дату и название доклада.)

1) Вторая конференция Математических центров России. Секция «Алгебраическая геометрия» (7–11 ноября 2022 г., МИАН, конференц-зал на 9 этаже, ул. Губкина, 8, г. Москва)

Название: Конечные подгруппы в группе бирациональных автоморфизмов поверхностей Севери–Брауэра над полем рациональных чисел;

2) Конференция "Молодежный забег МЦМУ МИАН" (13–17 марта 2023 г., Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, конференц-зал, 9 этаж, г. Москва)

Название: Birational automorphism groups of Severi–Brauer surfaces over the field of rational numbers;

3) II Всероссийская научно-практическая конференция “Математика в современном мире”, посвященная 160-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д. А. Граве.

Секция “Алгебраическая геометрия и теория чисел” (19–22 сентября 2023 г., учебный корпус № 7, ул. С. Орлова, 6, г. Вологда)

Название: Максимальные группы автоморфизмов кубических поверхностей над конечными полями характеристики 2;

4) Конференция по комплексному анализу и его приложениям (11–15 сентября 2023 г., пр. Свободный, д. 79, к. 3-4, г. Красноярск)

Название: Простое описание nef-конуса неприводимых голоморфных симплектических многообразий

9. Период обучения в аспирантуре (если применимо):

(указать дату начала обучения и предполагаемую дату окончания обучения)

01.11.2020-31.10.2024

10. Состояние работ по подготовке/защите кандидатской диссертации:

В данный момент готовится статья «En elementary description of nef cone for irreducible holomorphic symplectic manifolds»

11. Предполагаемое название, дата и место защиты диссертации:

Предполагаемое название: Рациональные кривые на неприводимых голоморфных симплектических многообразиях

12. Основное место работы/учебы в настоящее время, должность:

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений, ВШЭ факультет математики, стажёр-исследователь

13. План работ на следующий отчетный период:

(Описать планируемые исследования, их цели и ожидаемые результаты. Для отчета за последний год выполнения проекта не заполняется)

Описание nef-конуса (или двойственного ему конуса Мори) является очень важной задачей в алгебраической геометрии для применения в программе минимальных моделей. В то же время, описание кэлера конуса является важной задачей в комплексной геометрии, что является трансцендентным аналогом nef-конуса.

Для К3 поверхности S известно, что nef (или кэлера) конус высекается ортогональными гиперповерхностями к (-2) -кривым в положительном конусе $\text{Pos}(S) \subset H^{1,1}(S) \otimes \mathbb{R}$. Для неприводимых голоморфных симплектических многообразий, которые являются обобщением К3 поверхностей в большей размерности, ситуация существенно сложнее. Однако, для известных типов неприводимых голоморфных симплектических многообразий описание также можно предъявить. Например, в работах А. Байера и Э. Макри (MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing: nef and movable cones, Lagrangian fibrations, *Inventiones mathematicae*, 198:3 (2014), 505–590) и К. Ёшиока (Bridgeland's stability and the positive cone of the moduli spaces of stable objects on an abelian surface, *Development of Moduli Theory, Advanced Studies in Pure Mathematics*, 69, Mathematical Society of Japan, 2016, 473–537), используя сложную технику стабильности по Бриджленду, было дано описание nef-конуса для неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа К3 и типа Куммера.

Напомним, что для неприводимых голоморфных симплектических многообразий имеется естественная невырожденная квадратичная форма на вторых когомологиях, форма Бовилля-Богомолова, которая зависит только от топологических свойств многообразия. В частности, это дает некоторое обобщение естественной формы пересечения дивизоров для поверхностей. В серии работ Е. Ю. Америк и М. С. Вербицкого (см. список литературы в *Rational Curves and MBM Classes on Hyperkähler Manifolds: A Survey, Rationality of varieties, Progress in Mathematics*, 342, Birkhäuser, 2021, 75–96) было показано, что для неприводимого голоморфного симплектического многообразия X гиперповерхности в положительном конусе, которыми ограничивается nef (или кэлера) конус, являются множеством ортогональных относительно формы Бовилля-Богомолова дивизоров к рациональным кривым с ограниченным квадратом формы Бовилля-Богомолова. Более того в работе тех же авторов (MBM classes and contraction loci on low-dimensional hyperkähler manifolds of K3[n] type, *Algebraic Geometry*, 9:3 (2022), 252–265) для неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа К3 в малых размерностях было явно представлено описание таких рациональных кривых.

В следующий отчетный период планируется дать простое и явное описание таких рациональных кривых, которые дают описание nef-конуса или кэлера конуса для неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа К3 и типа Куммера произвольной размерности.

Подпись Грантополучателя _____

Подпись научного руководителя Грантополучателя _____

Дата заполнения _____