

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ПРОЕКТА
(Грант «Аспирант или молодой ученый без степени — Математика»)

1. ФИО Грантополучателя: *Зинова Полина Александровна*
2. Номер договора: 22-7-5-4-1
3. Название проекта: *Продолжение sl_2 -весовой системы на графы*
4. Год выполнения проекта (первый, второй, третий): *первый*
5. Аннотация:

(Кратко описать проведенные исследования и сформулировать полученные за отчетный период результаты. Не более 1/4 страницы)

Мы доказали ранее, что экспоненциальная производящая функция для значений sl_2 -весовой системы на соединениях произвольного графа G с дискретным (при условии, что все эти соединения графов являются графами пересечений) представляет собой линейную комбинацию m экспонент вида $Exp(tc)$, $Exp(t(c-1))$, $Exp(t(c-3))$, ..., $Exp(t(c-m(m+1)/2))$, где m — количество вершин в графе G . Коэффициенты этой линейной комбинации представляют собой многочлены от c (элемента Казимира в универсальной обертывающей алгебре алгебры $Li\ sl_2$).

Получен новый результат (совместно с П. Е. Закорко): в тех же условиях, если графы G и H двойственны друг другу в том смысле, что их множества ребер дополнительные друг к другу, то коэффициенты при экспоненте $Exp(t(c-k(k+1)/2))$ в соответствующих линейных комбинациях отличаются лишь множителем $(-1)^{(m-k)}$. Мы завершаем подготовку статьи с изложением этого результата.

Из этого утверждения выведена формула, связывающая эти коэффициенты со значениями sl_2 -весовой системы на полных графах в случае, когда граф G дискретный.

6. Подробный отчет за отчетный период:

(1-3 страницы. В свободной форме, но содержащий:

- описание проведенных исследований*
- полученные результаты*
- оценку новизны и актуальности полученных результатов)*

Описание проведенных исследований

Весовые системы – функции на хордовых диаграммах, удовлетворяющие так называемым четырехчленным соотношениям. В частности, весовую систему можно построить по всякой полупростой алгебре Li . Я занималась весовой системой, связанной с алгеброй $Li\ sl_2$. Каждой хордовой диаграмме может быть поставлен в соответствие ее граф пересечений, однако не любой граф является графом пересечений. Ландо и Чмутов доказали (см. [(Chmutov & Lando, 2007)]), что значение этой весовой системы на хордовой диаграмме зависит только от графа пересечений этой хордовой диаграммы, поэтому можно говорить о значениях этой весовой системы на графах пересечений.

Мы доказали ранее (см. [(Зинова & Казарян, 2023)]), что экспоненциальная производящая функция для значений sl_2 -весовой системы на соединениях произвольного графа G с дискретным (при условии, что все эти соединения графов являются графами пересечений) представляет собой линейную комбинацию m экспонент вида $Exp(tc)$, $Exp(t(c-1))$, $Exp(t(c-3))$, ..., $Exp(t(c-m(m+1)/2))$, где m – количество вершин в графе G . Коэффициенты этой линейной комбинации представляют собой многочлены от c (элемента Казимира в алгебре $Li\ sl_2$).

С. К. Ландо предположил, что для двойственных графов (с дополнительным множеством рёбер) коэффициенты при этих экспонентах отличаются только знаком.

Это было доказано с помощью работы с введенными ранее (в работах [(Закорко, 2023)], [(Зинова & Казарян, 2023)]) алгеброй долей и операторами добавления хорд на ней. Эти объекты были изучены более подробно. В частности, оказалось полезным изучение собственных векторов оператора U , который добавляет к доле хорду с концами на одной дуге, пересекающую эту доли. Кроме этого, оказалось полезно ввести инволюцию на алгебре долей и изучить некоторые ее свойства. Эта операция меняет ориентацию одной из дуг долей и домножает результат на $(-1)^t$, где t – количество хорд доли с концами на разных дугах. Через эту операцию несложно выразить двойственность графов пересечений. Кроме того, она связана с локальной двойственностью графов, которая обсуждается в статье Буше [(Bouchet, 1994)], где доказаны критерии того, что граф не является графом пересечений.

Полученные результаты:

Доказано, что если графы G и H двойственны друг другу в том смысле, что их множества ребер дополнительные друг к другу, и соединения этих графов с дискретными (мы обозначаем эти соединения через (G, n) , (H, n) , где $n = 0, 1, 2, \dots$ – количество вершин в дискретном графе) являются графами пересечений, то коэффициенты при экспоненте $\text{Exp}(t(c-k(k+1)/2))$ в экспоненциальных производящих функциях для значений sl_2 -весовой системы на графах (G, n) , (H, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ отличаются множителем $(-1)^{(n-k)}$.

Из этого утверждения выведена формула, связывающая эти коэффициенты в случае, когда граф G дискретный (то есть, (G, n) – полный двудольный граф) со значениями sl_2 -весовой системы на полных графах. Формула достаточно сложная, однако я предполагаю, что она может сыграть роль при исследовании этих коэффициентов.

Идет работа над статьей. Планируется подать в журнал *Journal of Combinatorial Theory Series B* или *Selecta Mathematica New Series*

Оценка новизны и актуальности полученных результатов)

Полученные результаты являются новыми.

Они могут быть полезны для дальнейшего изучения вопроса о продолжениях sl_2 -весовой системы на графы, не являющиеся графами пересечений. В частности, теорема о чередующихся знаках означает, что, если продолжение sl_2 -весовой системы на графы, не являющиеся графами пересечений, существует, то на графах, представляющих собой соединение произвольного графа с дискретным, должны выполняться те же условия. (Из моей работы [(Filipova, 2022)] следует, что для соединений цикла на 5 вершинах с дискретным графом это выполняется. В этом случае граф самодвойственный, и коэффициенты с нечетными номерами обращаются в нуль).

Кроме этого, могут быть полезны развитые в работе методы работы с долями. Например, один из способов продлить sl_2 -весовую систему на граф или серию графов, не являющиеся графами пересечений, заключается в том, чтобы с помощью 4-членных соотношений для графов выразить этот граф или графы через графы пересечений, а затем вычислять значение на линейной комбинации этих графов (как это было сделано в [(Filipova, 2022)]). Доли могут быть полезны при изучении этих значений.

Список литературы к отчёту:

Список литературы к отчёту

Bouchet, A. (1994). Circle graph obstructions. *Journal of Combinatorial Theory, Series B.*, 60, 107-144.

- Chmutov, S. V., & Lando, S. K. (2007). Mutant knots and intersection graphs. *Algebr. Geom. Topol.*, 7(3), 1579–1598.
- Filippova, P. (2022). Values of the sl_2 weight system on a family of graphs that are not the intersection graphs of chord diagrams. *Sb. Math.*, 213(2), 235–267.
- Закорко, П. Е. (2023). Значения sl_2 -веса системы на хордовых диаграммах с полным графом пересечения. *Математический сборник*, 214(7).
- Зинова, П. А., & Казарян, М. Э. (2023). Алгебра долей, полные двудольные графы и sl_2 -веса система. *Математический сборник*, 214(6), 87–109.

7. ПУБЛИКАЦИИ

(Для всех нижеприведенных подпунктов указывать в формате:

На английском или русском языках. Указать полный список авторов, название публикации, журнал и выходные данные публикации, включая год публикации, интернет-адрес публикации, интернет-ссылку на данную публикацию на ресурсе arXiv.org (если имеется). Если авторов более 5, указать только первого автора и общее число авторов. Для всех публикаций указать тип публикации (обзор, препринт, труды конференции, и т.п.). Публикации должны быть сгруппированы по типу (препринты/труды конференции и т.п.)

7.1. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за отчетный период (12 месяцев): Зинова, П. А., & Казарян, М. Э. (2023). Алгебра долей, полные двудольные графы и sl_2 -веса система. Математический сборник, 214(6), 87–109.**

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.2. Остальные публикации по результатам проекта **за отчетный период (12 месяцев): нет**

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и т. п.)

7.3. Публикации в рецензируемых журналах по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.1. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются только регулярные исследовательские статьи в рецензируемых журналах)

7.4. Остальные публикации по результатам проекта **за весь срок выполнения проекта**, за исключением публикаций из пункта 7.2. (для отчета за 1-ый год не заполняется):

(В данном пункте указываются препринты, публикации в трудах конференций, и т. п.)

7.5. Иные публикации за весь срок выполнения проекта (в т.ч. публикации, не связанные с темой проекта):

(В данном пункте указываются публикации, не упомянутые ни в одном из пунктов выше)

8. Участие в научных мероприятиях, стажировках, научном сотрудничестве и т.п., за отчетный период:

(Для каждого мероприятия укажите: даты приезда/отъезда, название и тип мероприятия, организацию, город, страну. Если применимо, укажите дату и название доклада.)

Международная конференция и школа "Инвариантность и интегрируемость".
Организатор: Международная лаборатория кластерной геометрии НИУ ВШЭ. Санкт-Петербург, Россия. Онлайн-доклад 01.11.2023 (совместно с Полиной Закорко). Название доклада: «Инволюция на долях».

9. Период обучения в аспирантуре (если применимо):

(указать дату начала обучения и предполагаемую дату окончания обучения)

10. Состояние работ по подготовке/защите кандидатской диссертации:

Диссертация на соискание ученой степени кандидата математических наук на тему «Весовая система, связанная с алгеброй Ли $sl(2)$, и алгебра Хопфа графов» защищена 19.12.2022. Степень присуждена 29 декабря 2022 г.

11. Предполагаемое название, дата и место защиты диссертации:

12. Основное место работы/учебы в настоящее время, должность:

Нет

13. План работ на следующий отчетный период:

(Описать планируемые исследования, их цели и ожидаемые результаты. Для отчета за последний год выполнения проекта не заполняется)

Ближайшее время:

Поиск других примеров продолжений sl_2 -весовой системы на серии графов, не являющихся графами пересечений, поиск закономерностей. Это может помочь продвинуться в поиске продолжения sl_2 -весовой системы на графы, не являющиеся графами пересечений.

Поиск комбинаторного смысла собственных векторов оператора добавления хорды U . Эти собственные векторы оказались полезны для изучения значений sl_2 -весовой системы, поэтому их дальнейшее изучение может быть полезно для изучения значений sl_2 -весовой системы на графах, представляющих собой соединения произвольного графа с дискретным u , возможно, на других соединениях графов.

Затем:

Изучение пространства примитивных в алгебре Хопфа графов и значений sl_2 -весовой системы на нём:

Поиск комбинаторной интерпретации для коэффициентов многочленов – значений sl_2 -весовой системы на проекциях на пространство примитивных элементов.

Поиск подходов к доказательству гипотезы С. К. Ландо о том, что подпространство примитивных элементов в алгебре Хопфа графов порождается проекциями полных двудольных графов.

Подпись Грантополучателя _____/П. А. Зинова

Подпись научного руководителя Грантополучателя _____/С. К. Ландо

Дата заполнения 14.11.2023