Уравнения с частными производными (вводный курс)

Филимонов А.М. [1]

Комментарий. *Курс носит вводный характер. Поэтому в начале дается некоторый обзор постановок задач, идей, некоторых методов и перспектив их развития, чтобы у слушателей, по возможности, сформировалось некоторое интуитивное представление о предмете. Эта часть («классические уравнения с частными производными») излагается достаточно сжато в виде серии задач для самостоятельного решения и соответствующих подробных указаний к ним.*

Курс рассчитан на студентов 3–4 курсов. Продолжительность — два семестра, причем каждый семестр можно сдавать независимо. Практика чтения курса в прошлые годы показала, что состав слушателей (и их ожиданий от этого курса) весьма неоднороден. Необходимые сведения по функциональному анализу и группам Ли сообщаются по ходу изложения и подкрепляются соответствующими примерами.

1 семестр (УЧП 1)

Введение

Дифференциальные уравнения — геометрический смысл. Интегрирование поля линейных многообразий различной размерности. Обыкновенные уравнения (ОДУ), уравнения с частными производными (УЧП), уравнения с многомерным временем). Некоторые проблемы, возникающие при переходе от ОДУ к УЧП — пример Гюнтера линейного УЧП первого порядка с постоянными коэффициентами и непрерывной правой частью, не имеющего решений. Аналитические решения и пример Ковалевской. Корректность постановок задач. Пример Адамара.

«Классические» уравнения с частными производными. (*Эта часть излагается, в основном, на упражнениях в виде серии задач, снабженных подробными указаниями и комментариями для неформального восприятия последующего материала* [2]).

Постановки задач и обзор основных методов решения (метод бегущих волн, метод стоячих волн, фундаментальные решения, вариационные методы). Почему у барабана более резкий звук, чем у струны? Элементы теории обобщенных функций — пространства основных и обобщенных функций. Секвенциальный подход. Преобразование Фурье. Линейные операторы с частными производными. Эволюционные уравнения. Классификация. Фундаментальные решения. Особенности постановки краевых задач. Стационарные уравнения.

Уравнения с частными производными первого порядка.

Задача Коши, характеристическая система. Пфаффовы системы и их интерпретация, как уравнений с многомерным временем. Связь с группами и алгебрами Ли.

[1] amfilimonov@yandex.ru

Примеры: уравнение Лиувилля, тепловое равновесие и проблема необратимости; уравнение Эйлера и катастрофы; уравнение Гамильтона-Якоби, оптико-механическая аналогия и полный интеграл.

Схема построения общего подхода к УЧП с использованием аналитических функций многих переменных.

Теорема Ковалевской. Характеристические поверхности. Связь с нелинейными уравнениями первого порядка.

2 семестр (УЧП 2)

Гиперболические уравнения и системы.

Характеристические многообразия, бихарактеристики, волновой фронт в общем случае. Примеры гиперболических уравнений и систем высших порядков: уравнение Ишлинского, система Максвелла. Гиперболические квазилинейные уравнения и системы. Канонические формы Римана и Шаудера. Разрешимость задачи Коши и смешанной задачи в квазилинейном случае. Градиентная катастрофа.

Метод «стоячих волн».

Спор о струне между Эйлером, Даламбером, Бернулли и Лагранжем. Метод Фурье. Спектральные задачи. Гипотеза Дебая и проблема Ферми–Паста–Улама. «Стоячие волны» в нелинейных задачах. Связь с колмогоровскими поперечниками соболевских классов функций.

Вариационный метод.

Задача о минимуме квадратичного функционала. Энергетическое пространство. Обобщенное решение и его интерпретация. Простейшие варианты теорем вложения Соболева. Следы. Экстремальные свойства собственных значений. Вариационный подход в нелинейных задачах.

[2] *«В теории линейных уравнений в частных производных наиболее плодотворные методы были выработаны не в процессе рассмотрения отвлеченно поставленной задачи, а скорее при изучении специальных физических проблем; точно так же и теория уравнений нелинейных может, как я полагаю, достигнуть наибольших успехов, если внимание наше со всею тщательностью, с учетом всех побочных условий, направится к специальным проблемам физического содержания. И в самом деле, решение совершенно специальной задачи, являющейся предметом настоящего сочинения, требует новых методов и понятий и приводит к результатам, которые, вероятно, будут играть известную роль и в задачах более общих».*

Б. Риман. О распространении волн конечной амплитуды.
Гёттинген, 1860 г.

«Мы сдали много выдвинутых вперед позиций, чтобы обеспечить оставшиеся позади коммуникации; мы укрылись за крепкие стены и добровольно ограничиваемся небольшой территорией, чтобы противостоять натиску критики. Многие, даже выдающиеся математики, настолько прочно восприняли идею «строгости», что даже не представляют себе возможности и необходимости «нестрогих» построений, базирующихся на полете фантазии. Избавить нас от опасности оскудения и маразма смогла бы как раз та линия развития, которая исходит от Римана».

Р. Курант. Речь, произнесенная в связи со столетием со дня рождения Римана.
Напечатана в "Natürwissenschaften", 1926 г., N 36, 52.

Цитируется по книге: Б. Риман. Сочинения. ОГИЗ, ГИТТЛ, М.-Л. 1949 г, 543 с.