

Многогранники Ньютона и тропическая геометрия.

Излагается случай многоугольников, кривых на плоскости и функций двух переменных. Обобщения на случай произвольной размерности даются в виде задач.

ТЕМА 1. Патчворкинг.

1. Перечислительная геометрия. 16я проблема Гильберта, вещественные кривые малых степеней.
2. Теорема Виро.
3. Как рисовать алгебраические кривые на многоугольниках.
4. Мономиальные замены переменных, \mathbb{R}_+ -торические многообразия.
5. Многогранники Ньютона, доказательство теоремы Виро.

ТЕМА 2. Теорема Безу.

1. Формулировка.
2. Кривые на плоскости: неявные и параметризованные. Локальный, аффинный и проективный случай. Не все кривые рациональные, но все локально параметризуются.
3. Трансверсальное пересечение кривых. Индекс пересечения. Его нестабильность для аффинных кривых и стабильность для проективных кривых.
4. Пространство систем уравнений данной степени. Дискриминант. Дискриминант – комплексная гиперповерхность, его дополнение связно.
5. Доказательство теоремы Безу для двух переменных.

ТЕМА 3. Теорема Кушниренко о числе решений системы.

1. Мотивация и формулировка.
2. Многоугольник Ньютона и обобщение конструкций лекции 1: главная часть многочлена, пространство систем уравнений с данным многогранником Ньютона, дискриминант.
3. Стабильность и число решений системы вдали от точек $(0, 0)$, $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$.
4. Мономиальные замены переменных. Стабильность и число решений системы рядом с точками $(0, 0)$, $(0, \infty)$ и $(\infty, 0)$.
5. Доказательство теоремы Кушниренко.

ТЕМА 4. Вееры и тропические кривые.

1. Опорная функция. Двойственный веер. Любой ли веер двойствен многограннику?

2. Локальные тропические кривые и их многогранники Ньютона. Тропикализация алгебраической кривой. Многогранник Ньютона кривой совпадает с многогранником Ньютона ее тропикализации.
3. Приложение: теория исключения. Многоугольник Ньютона кривой, заданной параметрически.
4. Индекс пересечения локальных тропических кривых. Корректность определения.
5. Тропическая теорема Кушниренко, формулировка.

ТЕМА 5. Тропическая теорема Кушниренко.

1. Аффинные тропические кривые, их многогранники Ньютона.
2. Примеры тропических кривых: множество изломов, двойственный веер многогранника. Эквивалентность разных определений аффинной тропической кривой.
3. Индекс пересечения аффинных тропических кривых. Корректность определения.
4. Доказательство тропической теоремы Кушниренко: пространство аффинных тропических кривых.
5. Тропическая геометрия как часть алгебраической: тропическое кольцо, тропическое гиперполе и т. д.

ТЕМА 6. Теорема соответствия Михалкина (без доказательства).

1. Исчислительная алгебраическая геометрия: рациональные кривые на плоскости.
2. Исчислительная тропическая геометрия: теорема Михалкина.
3. Объяснение ответа в локальном случае: рациональные кривые с тремя концами.
4. Как локальные ответы склеиваются в глобальный: патчворкинг кривых с особенностями. Зонтик Уитни.
5. Патчворкинг комплексных кривых. Доказательство теоремы Кушниренко с помощью патчворкинга.

ТЕМА 7. Смешанный объем и формула Д. Бернштейна.

1. Сумма Минковского.
2. Число решений общей системы уравнений с данными многогранниками Ньютона. Корректность определения и свойства.
3. Смешанная площадь. Существование и единственность. Формула Кушниренко–Бернштейна.
4. Тропическая формула Кушниренко–Бернштейна. Аддитивность и монотонность смешанной площади.
5. Ядро смешанного объема. Некоторые неравенства для смешанных объемов.

ТЕМА 8. Варианты продолжения.

1. Гладкие многообразия, эйлерова характеристика, линейные расслоения.
2. Торические многообразия: гладкое по простому вееру, проективное по многограннику, аффинное по конусу, общий случай.
3. Теория Морса. Формула Кушниренко–Хованского для эйлеровой характеристики кривой.
4. Параметризация кривых: нормализация, сигма-процесс.
5. Разрешение особенностей. Торическое разрешение. Локальный вариант формулы Кушниренко.
6. Многогранники Ньютона результата и дискриминанта. Secondary polytope.
7. Доказательство теоремы соответствия Михалкина для тропических кривых без кратных ребер.
8. Связь с актуальной наукой: гипотеза Нэша, гипотеза монодромии и т.д.