

## Программа курса «Комплексный анализ»

**1.** Комплексные числа, их свойства и действия над ними. Комплексная плоскость  $\mathbb{C}$  и ее компактификация  $\bar{\mathbb{C}}$ . Топология в  $\mathbb{C}$  и  $\bar{\mathbb{C}}$ , предел и непрерывность функций комплексного переменного. Функция  $e^z$  и экспоненциальная форма комплексных чисел.

Пути и кривые в  $\mathbb{C}$ . Теорема Жордана, понятие односвязной области. Спрямолинейные пути и кривые. Приращение аргумента вдоль пути. Индекс пути и его свойства.

**2.**  $\mathbb{R}$ - и  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость функций комплексного переменного. Условия Коши–Римана. Свойства комплексной производной. Производная по направлению. Голоморфные функции. Конформность, ее связь с голоморфностью.

Основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства. Многозначные функции, их непрерывные и голоморфные ветви.

**3.** Интеграл вдоль пути и вдоль кривой по комплексному переменному, их свойства. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши. Комплексная первообразная, ее свойства, формула Ньютона–Лейбница, существование голоморфных ветвей корня и логарифма в односвязных областях в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Интегральная формула Коши, формула Коши для производных и бесконечная дифференцируемость голоморфных функций. Формула Помпейю. Теорема о среднем, принцип максимума модуля. Теорема Мореры. Локально равномерная сходимости последовательностей голоморфных функций. Теорема Вейерштрасса.

**4.** Степенные ряды, теорема Абеля, формула Коши–Адамара. Почленная дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов. Особые точки на границе круга сходимости степенного ряда, теорема Принсгейма.

Ряды Тейлора. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Тейлора. Теорема Лиувилля. Нули голоморфных функций. Теорема единственности. Аппроксимация голоморфных функций многочленами, теорема Рунге.

**5.** Ряды Лорана. Разложение голоморфных функций в ряд Лорана. Неравенства Коши для коэффициентов Лорана. Изолированные особые точки голоморфных функций и их классификация, теорема Сохоцкого. Бесконечность как изолированная особая точка, целые и мероморфные функции с полюсом на бесконечности. Лемма Шварца и конформные автоморфизмы основных областей.

Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычет в точке  $\infty$ . Вычисление вычетов. Лемма Жордана. Вычисление интегралов (в том числе интегралов в смысле главного значения) при помощи вычетов. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Рунге. Принцип сохранения области.

**6.** Обратный принцип соответствия границ при конформном отображении. Критерии локальной однолиственности и локальной обратимости. Принцип симметрии Римана–Шварца. Отыскание конформных отображений данных областей. Теорема Гурвица и ее следствия. Классы  $S$  и  $\Sigma$  однолистных функций. Теорема площадей и теорема Кебе.

**7.** Принцип компактности для семейств голоморфных функций. Теорема Монтеля. Достижимость верхней грани непрерывного функционала на компактном семействе голоморфных в области функций. Теорема Римана о конформном отображении и ее доказательство.

Граничное поведение конформных отображений. Теоремы Каратеодори.

**8.** Аналитические элементы и их аналитическое продолжение. Аналитическое продолжение вдоль пути и по цепочке. Теорема о продолжении по гомотопным путям, теорема о монодромии.

Полная аналитическая функция в смысле Вейерштрасса, ее голоморфные ветви и точки аналитичности. Точки ветвления аналитических функций и их классификация. Полные аналитические функции корень и логарифм. Понятие о римановой поверхности.

**Дополнение**<sup>1</sup>. Целые и мероморфные функции: рост целой функции, порядок и тип; разложение в бесконечное произведение, связь между ростом целой функции и ее нулями; разложение мероморфных функций на простейшие дроби; Гамма-функция.

Модулярная функция, теоремы Пикара.

---

<sup>1</sup>Если позволит время, или в форме задач на семинарах