Алгоритмы распознавания реализуемости графов и гиперграфов
спецкурс проф. А.Б. Скопенкова для 1-3 курсов

Аннотация

Хорошо известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость, т.е., можно ли граф расположить на плоскости так, чтобы его ребра не пересекались и не самопересекались. Мы рассмотрим аналогичную задачу для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость n-мерного гиперграфа в m-мерное пространство? Теория гиперграфов — раздел математики, возникший на стыке комбинаторики, топологии и программирования, бурно развивающийся в последнее время.

Основное содержание курса — *алгоритмически мотивированное введение в алгебраическую топологию.* Венец курса — использование ее методов для доказательства того, что

• при $m = 2n \geq 6$ имеется полиномиальный алгоритм распознавания вложимости n-мерного гиперграфа в m-мерное пространство;

• при $6 < 2m < 3n + 3$ указанная проблема распознавания вложимости является NP-трудной (таким образом, скорее всего, быстрых алгоритмов для ее решения не существует).

Это свежие результаты 2008 года.

Будут предложены красивые задачи для исследования.

Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы гомологий и т.д.) будут даны. Основные идеи будут представлены на 'олимпиадных' примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Таким образом, для изучения спецкурса достаточно владения основами теории графов. В то же время для тех, кто уже изучал алгебраическую топологию, ее применение к конкретным задачам обычно оказывается нетривиальным и интересным. Большая часть материала будет изучаться в виде решения задач студентами с их последующим разбором на занятии.

Примерная программа (некоторые первые или некоторые последние пункты могут быть опущены в зависимости от уровня слушателей)

1. Линейные вложения графов. Гомеоморфность и кусочно-линейные вложения графов. Линейный алгоритм распознавания вложимости графов в плоскость.*

2. Устойчивость самопересечений путей на плоскости: определение, примеры и простейшие результаты.

3. Препятствие Ван Кампена к неустойчивости самопересечений пути на плоскости. Его неполнота для циклов и полнота для путей.

4. Препятствие Ван Кампена к вложимости графов в плоскость.

5. Инвариант Ван Кампена вложений графов в плоскость и в трехмерное пространство.

6. Линейные вложения двумерных гиперграфов (симплициальных комплексов) на языке систем точек. Рамсеевская теория зацеплений для линейных вложений. Нереализуемость в четырехмерном пространстве полного 2-гиперграфа на 7 вершинах (2-мерного остова 6-симплекса) и декартова произведения $K_5 \times K_5$ (решение проблемы Менгера).

7. Определение одномерного и двумерного гиперграфов (симплициальных комплексов). Определение их линейных и кусочно-линейных вложений в плоскость и в n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$. Теорема общего положения.

8. Вложения двумерных гиперграфов в плоскость. Теоремы Куратовского и Халина-Юнга. Линейный алгоритм распознавания вложимости двумерных гиперграфов в плоскость.*

9. Вложимость двумерных гиперграфов в трехмерное пространство: примеры. Свежие результаты об алгоритмической распознаваемости вложимости двумерных гиперграфов в трехмерное пространство и в трехмерные многообразия (Jaco-Sedgwick 1998, Tonkonog 2010; только формулировки).

10. Препятствие Ван Кампена к вложимости n-мерных гиперграфов в $2n$-мерное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. Полиномиальный алгоритм распознавания вложимости для $n \geq 3$.

11. Рамсеевская теория зацеплений для кусочно-линейных вложений. Построение колец Борромео при помощи тора и коммутатора.

12. Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера неполноты препятствия Ван Кампена к вложимости двумерных гиперграфов в $\mathbb{R}^4$.

13. Алгоритмические результаты о вложимости двумерных гиперграфов. NP-трудность проблемы вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. Определение класса NP и NP-трудности. Многомерные аналоги. (Matousek-Tancer-Wagner 2010.)

14. Трехмерный аналог примера Фридмана-Крушкаля-Тайхнера: $P_{x_1 \vee \overline{x}_1}$. Обобщения: $P_{x_1 x_2 \vee \overline{x}_1}$, $P_{x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}$. Общее построение 2-мерного гиперграфа P_f, отвечающего формуле f для булевой функции. Необходимое условие вложимости P_f в R^3: $f(\vec{x}) = 0$ для некоторого $\vec{x}$. Идея доказательства NP-трудности.

Литература: [2], [SZ], [SS] из http://www.mccme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#refere

[2] А. Скопенков, Алгоритмы распознавания реализуемости гиперграфов, http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf

[SZ] A. Skopenkov and A. Zimin, Realizability of hypergraphs in Euclidean spaces, http://www.mccme.ru/circles/oim/exalong.pdf

[SS] A. Skopenkov and M. Skopenkov, Some short proofs of the nonrealizability of hypergraphs, http://arxiv.org/abs/1402.0658