Наглядная теория потенциала

Михаил Скопенков

В курсе планируется доказать следующий классический результат, а также некоторые его современные обобщения:

Теорема Пойа. Если человек случайным образом перемещается по 2-мерной решетке, то он вернется в начальную точку с вероятностью 1. Если же он перемещается по 3-мерной решетке, то вероятность его возвращения строго меньше 1.

Доказательство основаны на замечательной физической интерпретации, использующей электрические цепи. Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Решения большинства задач первых занятий доступно школьникам. Никаких специальных знаний физики не требуется. Будут предложены красивые задачи для исследования.

Примерная программа.

1. Определение случайного блуждания. Определение электрической цепи. Физическая интерпретация вероятности достижения. Возвратность случайного блуждания по 1-мерной решетке.

2. Существование и единственность потенциала в электрической цепи. Принцип максимума. Проводимость и ее вероятностный смысл. Сохранение энергии. Вариационный принцип. Принцип разрезания и склейки. Проводимость между центром и границей квадратной решетки $n \times n$. Возвратность случайного блуждания по 2-мерной решетке.

3. Проводимости деревьев. Невозвратность случайного блуждания по 3-мерной решетке.

4. Проводимость правильных графов. Бесконечные электрические цепи. Проводимость между соседними узлами квадратной решетки.

5*. Компьютерное моделирование распределения температуры по пластине. Существование и единственность распределения температуры на решетке. Ограниченность энергии при измельчении решетки. Сходимость температуры при измельчении решетки.

Литература

1. М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов, Случайные блуждания и электрические цепи, Математическое Просвещение, 3-я серия **16** (2012), 25–47, http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html.

2. А. Пахарев, М. Скопенков, А. Устинов, Сквозь сеть сопротивлений, Математическое Просвещение, 3-я серия **18** (2014), 33–65.

3*. М. Скопенков, М. Прасолов, С. Дориченко, Разрезания металлического прямоугольника, Квант **3** (2011), 10–16, http://arxiv.org/abs/1011.3180.

Наглядная теория потенциала

Михаил Скопенков

1. Случайные блуждания

1.1. Одномерные блуждания

Мы сначала сформулируем задачу и лишь потом дадим необходимые определения.
1. Человек ходит по отрезку улицы, состоящему из 5 кварталов. Начав свой путь на границе кварталов в точке x, он с вероятностью $1/2$ перемещается на один квартал влево и с вероятностью $1/2$ — на один квартал вправо. Подойдя к границе кварталов, он опять выбирает направление движения случайным образом. Если он оказывается в точке 5 (его дом) или в точке 0 (бар), то он прекращает движение: см Рис 1.

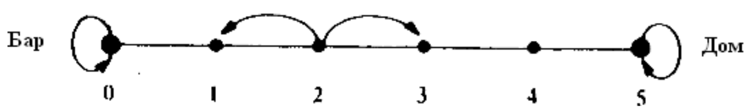


Рис. 1: Случайное движение по улице; см. задачу 1.

(A)* Напишите компьютерную программу, моделирующую движение этого человека. Запустите ее много раз и определите процент числа случаев, в которых он приходит домой. Вы можете использовать этот способ для угадывания ответов в последующих задачах.
(B) Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что человек, начавший свое движение в точке x и сделавший не более T ходов, оказался дома. Заполните следующую таблицу десятичными дробями с точностью до сотых.

Таблица 1: Вероятности $P_T(x)$ для малых T

T \ x	0	1	2	3	4	5
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2						
3						
4						

(C) Найдите вероятность $P(x)$ того, что человек дойдет до дома через какое-то количество ходов.

(A) Предположим, что у некоторого эксперимента имеется n *равновероятных* исходов, и событие X происходит ровно в m из них. Тогда *вероятностью* события X называется число $P_1(X) := m/n$.

Например, вероятность выпадения орла при бросании монеты — $1/2$; вероятность выпадения 6 очков на кубике — $1/6$; вероятность пойти направо по нашей улице — $1/2$.
(B) Теперь предположим, что событие X зависит от последовательности таких экспериментов. Последовательность из T экспериментов имеет n^T возможных исходов.

Предположим, что событие X происходит ровно при m_T исходов из них. Тогда *вероятностью* события X называется число $P_T(X) := m_T/n^T$.

Например, есть ровно 4 возможных исхода при бросании монеты 2 раза:

1-ый бросок	орел	орел	решка	решка
2-ой бросок	орел	решка	орел	решка

Пусть событие X состоит в появлении решки хотя бы один раз. Событие X происходит в 3 случаях из 4 возможных. Поэтому вероятность события X есть $P_2(X) = 3/4$.

Вероятность получения более 10 очков при бросании двух кубиков — $1/12$, так как это событие происходит в ровно 3 случаях ($5+6$, $6+5$ или $6+6$) из 36 возможных. Вероятность того, что человек, начавший с точки 3, сдвинется вправо два раза подряд составляет $1/4$.

(C) Пусть теперь событие X зависит от бесконечной последовательности таких экспериментов. Мы будем называть число $P(X)$ *вероятностью* события X, если вероятности $P_T(X)$ стремятся к числу $P(X)$ при стремлении T к бесконечности[1].

Например, вероятность выпадения решки хотя бы один раз в бесконечной серии бросков составляет $P(X) = 1$, так как $P_T(X) = 1 - 1/2^T$ стремится к 1 при стремлении T к бесконечности.

То, что вероятности $P(X)$ *существуют* для всех событий X, рассматриваемых в проекте, можно использовать без доказательства.

2. * Петя и Паша играют на монетки; всего у них есть 5 монеток; в каждом раунде Петя выигрывает у Паши одну монетку с вероятностью $1/2$ и проигрывает с вероятностью $1/2$; они играют до тех пор, пока у Пети не станет 0 монеток (он проиграл) или 5 (он выиграл все монеты Паши). Найдите вероятность $P(x)$ того, что Петя выиграет, начав игру с x монетками.

3. * Предположим, нашего "путешественника" сносит в одну сторону; точнее, пусть он каждый раз перемещается вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $q = 1 - p$. Найдите вероятности $P(x)$ в этом случае.

4. * Предположим, что вы играете на деньги; сначала у вас 20 монет, а у вашего соперника — 50 монет; в каждой игре вы выигрываете одну монету с веротностью 0.45 и проигрываете с вероятностью 0.55; игра продолжается до тех пор, пока у кого-либо не закончатся деньги. Найдите вероятность своего разорения.

Электрическая цепь — это связный конечный граф, у которого каждому ребру xy приписано положительное вещественное число $C(xy)$, называемое его *проводимостью*[2], и задано два непересекающихся выделенных множества вершин (P и N). Вершины из множества N соединены с отрицательным полюсом батарейки и землей, а вершины из множества P — с положительным; см. рисунок 2.

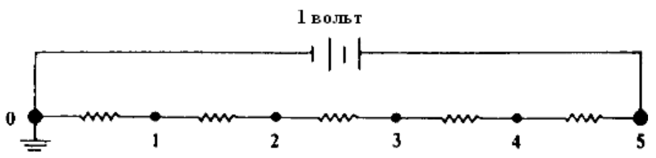


Рис. 2: Электрическая цепь; см. задачу 3.

[1]Формально это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число T_0 такое, что для каждого $T > T_0$ выполнено $|P(X) - P_T(X)| < \varepsilon$.

[2]Величина, обратная проводимости, называется *сопротивлением*.

Пусть теперь каждой вершине x электрической цепи приписано действительное число $v(x)$. Назовем функцию $v(x)$ *потенциалом*, если выполнены следующие 2 аксиомы:

1. *Граничные условия.* Если $x \in N$, то $v(x) = 0$. Если $x \in P$, то $v(x) = 1$.
2. *Правило Кирхгофа.* Если $x \notin P \cup N$, то $\sum_{xy} C(xy)\,(v(x) - v(y)) = 0$, где суммирование ведется по всем ребрам xy, содержащим вершину x.

Число $i(xy) := C(xy)\,(v(x) - v(y))$ называется *током*, идущим по ребру xy; $i(x) := \sum_{xy} i(xy)$ — *током*, втекающим в цепь через вершину x (так, $i(x) = 0$ для каждого $x \notin P \cup N$ по аксиоме 2); $C := \sum_{x \in P} i(x)$ называется *эффективной проводимостью* цепи между множествами P и N; $Q := \sum_{xy} C(xy)\,(v(x) - v(y))^2$, где суммирование ведется по всем ребрам цепи, называется *тепловой мощностью* цепи.

5. Одинаковые резисторы соединены последовательно и подключены к батарейке в 1 вольт как показано на рисунке 2. Найдите потенциалы $v(x)$ в точках $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

6. Рассмотрим цепь с вершинами $0, 1, \ldots, n$, ребрами $01, 12, \ldots, (n-1)n$ единичной проводимости, и выделенными множествами $N = \{0\}$, $P = \{n\}$.

(A) *Принцип максимума.* Функция $v(x)$, удовлетворяющая аксиоме 2 достигает своего максимума и минимума в вершинах из множества $P \cup N$.

(B) *Теорема единственности.* Если $v(x)$ и $u(x)$ — две функции, удовлетворяющие аксиомам 1–2, то $v(x) = u(x)$ для всех x.

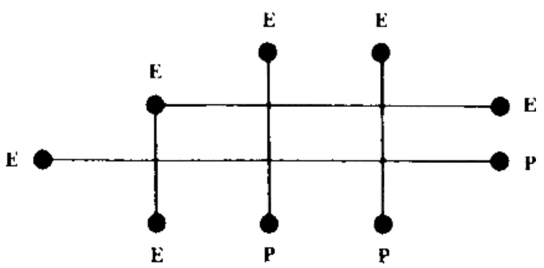
(C) Найдите потенциалы $v(x)$ и эффективную проводимость данной цепи. К чему они стремятся при стремлении числа n к бесконечности?

7. Сформулируйте и докажите теорему Пойа для 1-мерной решетки.

1.2. Двумерные блуждания

8. Рассмотрим город, схема которого приведена на рисунке 3 слева. Отрезки обозначают улицы. Пути отхода помечены буквой E, а буквой P помечены точки, занятые полицией. Найдите с точностью до сотых вероятность $P(x)$ того, что начав свой путь в точке x, человек убежит, а не попадет в руки полиции. Из точки $x = (a, b)$ он перемещается в каждую из точек $(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1), (a, b-1)$ с вероятностью $1/4$. Если он достигает одной из точек E или P, то его передвижения заканчиваются.

9. Найдите потенциалы $v(x)$ в цепи из единичных резисторов на рисунке 3 справа.



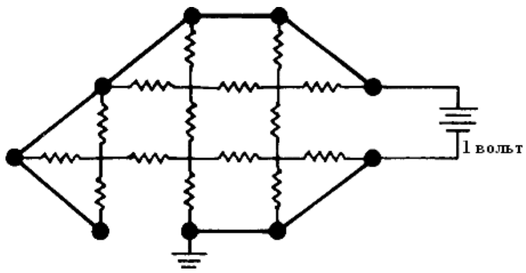


Рис. 3: Случайное движение по городу и электрическая цепь; см. задачи 8 и 9.

10. Паук перемещается случайным образом по ребрам

(A) куба; **(B)*** октаэдра; **(C)*** додекаэдра; **(D)*** икосаэдра;

какова вероятность того, что он достигнет противоположной вершины h быстрее, чем вернется в начальную вершину a; см. рисунок 4 слева?

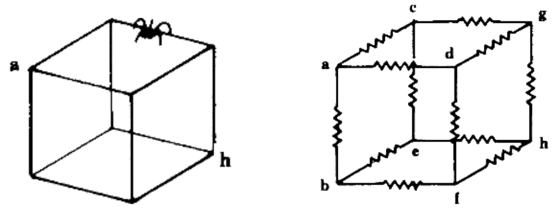


Рис. 4: Случайное блуждание по кубу и электрическая цепь; см. задачи 10(A) и 12(A).

11. Следующие преобразования сохраняют эффективную проводимость цепи:
(A) замена двух резисторов, соединенных последовательно, на один резистор проводимости $1/\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)$; см. рисунок 5 слева;
(B) замена двух параллельно соединенных резисторов на один резистор с проводимостью C_1+C_2; см. рисунок 5 справа;
(C) объединение двух вершин с одинаковыми потенциалами в одну новую вершину.

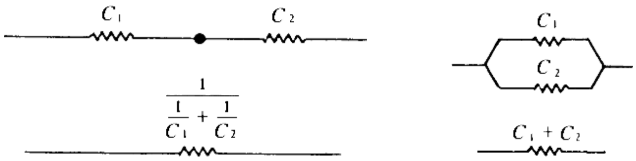


Рис. 5: Последовательное и параллельное соединение; см. задачу 11.

12. Найдите эффективную проводимость между
(1) противоположными вершинами; **(2)*** смежными вершинами;
(A) куба; **(B)*** октаэдра; **(C)*** додекаэдра; **(D)*** икосаэдра;
с ребрами единичной проводимости; см рисунок 4 справа.

13. * Турист выходит из отеля и перемещается случайным образом по улицам Парижа, схема центра которого приведена на рисунке 6 слева. Найдите вероятность того, что он дойдет до Триумфальной арки до того, как доберется до окраины города.

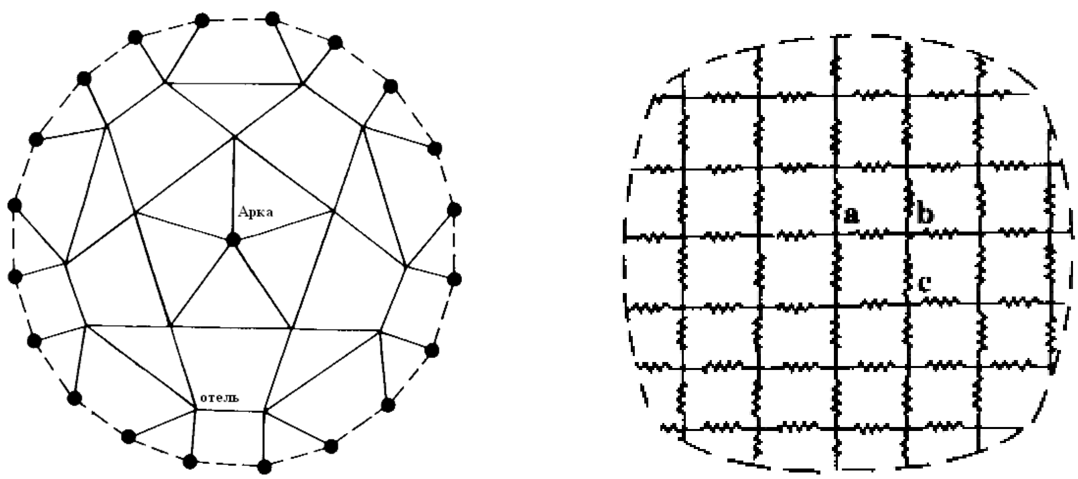


Рис. 6: Туристическая карта Парижа и решеточная цепь; см. задачи 13 и 14.

14. ** Проводимость между вершинами **(A)** a и b; **(B)** a и c; двумерной решетки из единичных резисторов равна 2 и $\pi/2$, соответственно; см. Рис. 6 справа.

Для 2-мерной решетки в определении потенциала мы добавляем еще одну аксиому:

3. $v(x)$ стремится к $1/2$ при стремлении расстояния между x и некоторой фиксированной вершиной к бесконечности.

Разрешается пользоваться без доказательства существованием функции $v(x)$, удовлетворяющей аксиомам 1–3.

15. *Закон монотонности.* Разрезание каких-либо ребер цепи может только уменьшить эффективную проводимость между данными вершинами; см. рисунок 7 слева. Объединение каких-либо вершин в одну вершину может только увеличить эффективную проводимость между данными вершинами; см. рисунок 7 в центре.

16. (A) Проводимость между центром и границей квадратной решетки 4×4 из единичных резисторов меньше 3; см рисунок 7 справа.

(B) К чему стремится проводимость между центром и границей квадратной решетки $2n \times 2n$ из единичных резисторов при стремлении n к бесконечности?

(C)** Найдите асимптотику проводимости между центром и границей квадратной решетки $2n \times 2n$ из единичных резисторов.

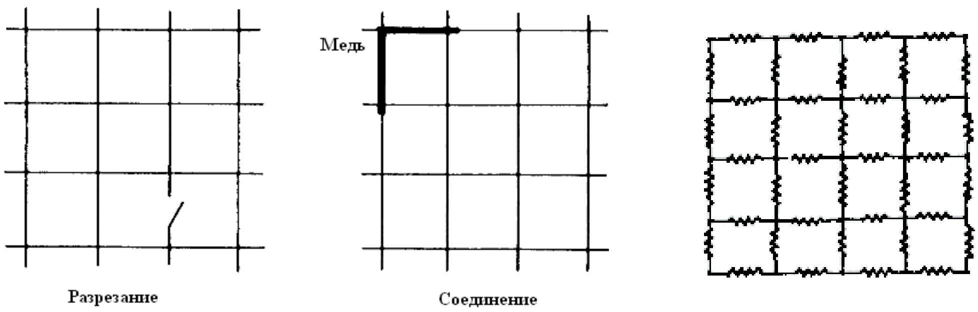


Рис. 7: Разрезание, соединение, и квадратная решетка 4×4; см. задачи 15 и 16.

17. Докажите теорему Пойа для 2-мерной решетки.

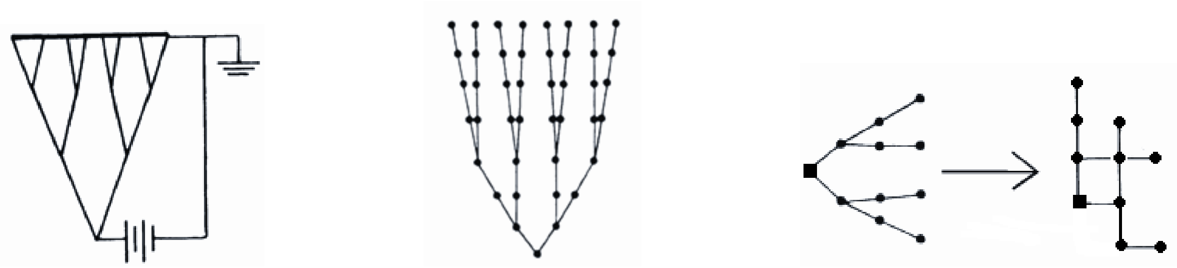


Рис. 8: (Слева) бинарное дерево глубины 3; (в центре) модифицированное бинарное дерево глубины 3; (справа) разрешенные пересечения ребер в этом дереве; см. задачи 18, 19 и 21.

18. Найдите сопротивление бинарного дерева глубины **(A)** 3; **(B)** 2010, составленного из единичных резисторов (см. рис. 8 слева).

19. Найдите сопротивление *модифицированного* бинарного и троичного деревьев глубины 2010, в которых каждый резистор на k-ом уровне заменяется на 2^k последовательно соединенных единичных резисторов (см. рис. 8 в центре).

20. Какие из деревьев, упомянутых **(A)** в задаче 18; **(B)** в задаче 19; можно вырезать из трехмерной решетки?

21. А если разрешаются пересечения (см. рис. 8 справа) ребер на равном расстоянии от корня?

22. Докажите теорему Пойа для 3-мерной решетки.

Результаты участников спецкурса

Василий Горохов-Апельсинов	1.1.1AC, 1.1.2-1.1.4, 1.1.6C, 1.2.2- 1.2.3, 1.2.9A
Сергей Кузьмичев	1.1.1B, 1.1.2, 1.1.5, 1.1.6AC, 1.1.7, 1.2.3A, 1.2.9A
Иван Черноглазов	1.1.5, 1.1.7, 1.2.3A
Кирилл Кисилев	1.1.2, 1.1.7, 1.2.10mod
Игорь Власов	1.1.2, 1.1.6C
Александр Чистяков	1.2.5A, 2.1.2
Илья Герман	1.1.7
Дарья Анзон	1.1.2, 1.1.4
Александр Романенков	1.1.2-1.1.3, 1.1.7

23. *Задача Неймана.* Пусть каждой вершине конечной электрической цепи поставлено в соответствие число $i(x)$. Предположим, что сумма по всем вершинам $\sum_x i(x) = 0$. Тогда существует такая функция $v(x)$ на вершинах, что для каждой вершины x выполнено равенство $\sum_{xy} C(xy)(v(x) - v(y)) = i(x)$.

Предположим, что имеется граф Γ, у которого сопротивление каждого ребра равно 1. Возьмем в графе Γ два смежных ребра AB и AC. Эти ребра назовем *эквивалентными*, если существует перестановка вершин графа, переводящая соединенные ребром вершины в соединенные ребром вершины, при которой A переходит в A и B — в C. Вершину графа назовем *центром симметрии* графа Γ, если все ребра, содержащие ее, эквивалентны. Граф Γ называется *правильным*, если все его вершины — центры симметрии графа.

Примеры правильных графов: правильные многогранники любой размерности; правильные решетки на евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского и их многомерных аналогах; симметричные решетки на торе и т. п. Нетривиальный пример: граф ромбододекаэдра. Это многогранник, который получается, если к каждой грани куба приставить по четырехугольной пирамиде так, что все треугольники, граничащие по ребрам куба, сольются в ромбы. Поверхность ромбододекаэдра состоит из 12 ромбов. Он нетривиален тем, что его вершины имеют разную степень (3 и 4).

Правильный граф будем называть симметричным, если его вершины можно разбить на пары так, что отображение, одновременно меняющее между собой вершины в каждой паре, является автоморфизмом графа. Вершины, составляющие пару будем называть *диаметрально противоположными.* (Для многогранников такое разбиение на пары строится с помощью центральной симметрии.)

24. *Теорема Ходулева.* Пусть правильный граф содержит n вершин, A_1 и A_2 — соседние вершины степеней k_1 и k_2, соответственно. Докажите, что сопротивление между ними равно

$$\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

25. *Теорема Устинова.* К двум соседним вершинам правильного симметричного графа Γ с n вершинами подвели напряжение так, что по соединяющему их ребру потек ток I. Тогда по диаметрально противоположному ребру будет течь ток $I/(n-1)$.

26. * Докажите, что суммы $D_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{C_n^k}$ и $F_n = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{2^k}{k}$ равны друг другу. Как эти суммы связаны с сопротивлением многомерного куба? В качестве следствия получите, что порядок вхождения двойки в число $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}$ стремится к бесконечности с ростом n.

27. Электрическая цепь получается из прямоугольника $2n \times (2n+1)$ с вершинами $(n; n+1)$, $(-n; n+1)$, $(-n; -n)$, $(n; -n)$ склейкой его границы так, чтобы получился тор. Множества P и N состоят из вершин $(0; 0)$ и $(0; 1)$, соответственно. Проводимости всех ребер равны 1.

(A) Тепловая мощность этой цепи меньше 10.

(B) Значения потенциала на границе прямоугольника с вершинами $(n; n)$, $(-n+1; n)$, $(-n+1; -n)$, $(n; -n)$ равномерно стремятся к $1/2$ при неограниченном возрастании

n.

28. **(A)** Если человек случайным образом перемещается по 2-мерной решетке, то вероятность его возвращения в начальный узел до первого попадания в узел, соседний с ней справа, равна $1/2$.

(B) Сопротивление между соседними узлами бесконечной 2-мерной решетки из единичных резисторов равно $1/2$.

Для 2-мерной решетки в определении потенциала мы добавляем еще одну аксиому:

3. $v(x)$ стремится к $1/2$ при стремлении расстояния между x и некоторой фиксированной вершиной к бесконечности.

При решении предыдущей задачи разрешается пользоваться без доказательства существованием функции $v(x)$, удовлетворяющей аксиомам 1–3.

29. *Теорема Единственности.* Электрическая цепь $\mathbb{Z}^2$ представляет собой 2-мерную решетку. Множества P и N состоят из вершин $(0;0)$ и $(0;1)$, соответственно. Проводимости всех ребер равны 1. Тогда существует не более одной ограниченной функции $v(x)$ на вершинах этой цепи, удовлетворяющей обеим аксиомам 1–2.

30. *Теорема Существования.* На вершинах электрической цепи $\mathbb{Z}^2$ существует ограниченная функция $v(x)$, удовлетворяющая обеим аксиомам 1–2.

31. Для любой пары вершин x и y, симметричных относительно точки $(1/2, 0)$ выполнено равенство $v(x) + v(y) = 1$.

32. Тепловая мощность построенной функции $v(x)$ на любом конечном подграфе меньше 10.

33. ** Построенная функция $v(x)$ равномерно стремится к $1/2$ при стремлении расстояния между x и некоторой фиксированной вершиной к бесконечности.

Результаты участников спецкурса

Кирилл Киселев	1.1.2, 1.1.7, 1.2.3A, 1.2.4, 1.2.5(1AD)(2A), 1.2.10, 1.3.1AB, 1.3.2, 1.3.5, P=C/deg a, 2.1.6B
Александр Романенков	1.1.1A, 1.1.2–1.1.4, 1.1.6–1.1.7, 1.2.1, 1.3.1AB, 2.1.3, 2.1.5ABC, 2.1.6AB, 2.1.8A, 2.2.5ABCD
Василий Горохов-Апельсинов	1.1.1AC, 1.1.2–1.1.4, 1.1.6C, 1.2.2–1.2.3, 1.2.9A, 1.3.3A, 1.3.4
Сергей Кузьмичев	1.1.1B, 1.1.2–1.1.5, 1.1.6AC, 1.1.7, 1.2.1–1.2.3, 1.2.4C, 1.2.9A
Иван Черноглазов	1.1.5, 1.1.7, 1.2.3A, 2.1.1–2.1.2, 2.1.6A
Игорь Власов	1.1.2–1.1.3, 1.1.6C, 2.1.6B, 2.2.5ABCD
Александр Чистяков	1.2.5A, 1.2.2, 1.3.1-1.3.3A
Дарья Анзон	1.1.1–1.1.6, 1.2.3A, 1.2.4AB
Григорий Головин	1.1.2, 2.1.1, 2.1.3
Илья Герман	1.1.7, 1.1.4

2. Computer mathematics

2.1. Numerical solution of the stationary heat equation

Let Q be the unit square with the vertices $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ and the center O. Let Q_N be the square lattice with step $h = 1/2^N$ obtained from Q by partition it into 4^N equal squares. Given a function T on the boundary of Q, denote by T_N the function on the vertices of Q_N equal to T in each boundary vertex of Q_N and satisfying the equation

$$T_N(x,y) = (T_N(x+h,y) + T_N(x-h,y) + T_N(x,y+h) + T_N(x,y-h))/4 \quad (1)$$

in each interior vertex (x,y) of Q_N.

Let $\Delta = ABC$ be a regular triangle with center O. The *triangular lattice* Δ_N is obtained from Δ by partition into 9^N equal regular triangles. Define the function T_N on the vertices of Δ_N similarly to the case of square lattice.

The points marked (QI), (QII), ... below concern square lattices, the ones marked (ΔI), (ΔII), ... concern triangular lattices, the ones marked (M) concern acute triangulations introduced below. You may use computer to guess answers. Experimental results will be appraised as well.

34. Find $T_N(O)$ for:

$$(\mathbf{QI})\, T(P) := \begin{cases} AP \cdot BP, & \text{if } P \in AB; \\ BP \cdot CP, & \text{if } P \in BC; \\ -CP \cdot DP, & \text{if } P \in CD; \\ -DP \cdot AP, & \text{if } P \in DA. \end{cases} \qquad (\mathbf{QII})\, T(P) := \begin{cases} AP \cdot BP, & \text{if } P \in AB; \\ -BP \cdot CP, & \text{if } P \in BC; \\ CP \cdot DP, & \text{if } P \in CD; \\ -DP \cdot AP, & \text{if } P \in DA. \end{cases}$$

$$(\mathbf{\Delta})\, T(P) := \begin{cases} AP \cdot BP, & \text{if } P \in AB; \\ BP \cdot CP, & \text{if } P \in BC; \\ -2CP \cdot AP, & \text{if } P \in CA; \end{cases}$$

35. Find $T_N(x,y)$ for:

$$(\mathbf{QI})\, T(P) := \begin{cases} AP, & \text{if } P \in AB; \\ BP+1, & \text{if } P \in BC; \\ DP+1, & \text{if } P \in CD; \\ AP, & \text{if } P \in DA. \end{cases} \qquad (\mathbf{QII})\, T(P) := \begin{cases} AP, & \text{if } P \in AB; \\ CP, & \text{if } P \in BC; \\ CP, & \text{if } P \in CD; \\ AP, & \text{if } P \in DA. \end{cases}$$

(**QIII**) the function $T(P)$ from 34(QII).

(**ΔI**) the function $T(P)$ which is linear on each side of the triangle Δ.

$$(\mathbf{\Delta II})\, T(P) := \begin{cases} 0 & \text{if } P \in AB; \\ BP \cdot CP & \text{if } P \in BC; \\ -AP \cdot CP, & \text{if } P \in CA; \end{cases}$$

36. For each $N = 1, 2, \ldots$ find $T_N(O)$ with precision 0.1 for

$$(\mathbf{Q})\, T(P) := \begin{cases} 0, & \text{if } P \in AB; \\ BP^3 - 3BP, & \text{if } P \in BC; \\ 1 - 3DP^2, & \text{if } P \in CD; \\ AP^3, & \text{if } P \in DA. \end{cases} \qquad (\mathbf{\Delta})\, T(P) := \begin{cases} 0 & \text{if } P \in AB; \\ BP \cdot CP, & \text{if } P \in BC; \\ AP \cdot CP, & \text{if } P \in CA; \end{cases}$$

37. For which a, b, c, d there exist $T(P)$ such that for each N

($\mathbf{QI}, \mathbf{\Delta I}$) $T_N(x,y) = ax + by + c$; ($\mathbf{QII}, \mathbf{\Delta II}$) $T_N(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$;

($\mathbf{QIII}, \mathbf{\Delta III}$) $T_N(x,y) = ax^3 + bx^2y + cy^2x + dy^3$?

Let M be a convex polygon and let M_N be a partition of M into convex polygons. Suppose that a *weight* $c(UV) > 0$ is assigned to each edge UV of the triangulation M_N. Given a function T on the boundary of M, denote by T_N the function on the vertices of M_N equal to T in each boundary vertex and in each interior vertex U satisfying the equation

$$\sum_V c(UV)(T_N(U) - T_N(V)) = 0, \tag{2}$$

where the sum is over all the neighbors V of the vertex U.

38. Introduce some weights $c(UV) > 0$ so that any function of the form $T_N = ax + by + c$ satisfies (2)

($\mathbf{Q}$) on a partition M_N of a rectangle M into equal (and equally oriented) rectangles;

($\mathbf{\Delta}$)$*$ on a triangulation M_N by acute triangles.

Remark. In this problem "introduce" means "express through the side lengths of rectangles" in (Q) and "express through the angles of triangles" in (Δ). Notice that there can be more than one way to do it.

The *(free) energy* of a real-valued function U defined on the vertices of Q_N (respectively, Δ_N) is defined by the formula

$$E(U) := \sum_{zw} c(zw)\left(U(z) - U(w)\right)^2, \tag{3}$$

where the sum is over all the edges zw of the lattice Q_N (respectively, Δ_N).

39. ($\mathbf{Q}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{M}$) Does the energy of the function $T_N(x,y) := ax + by + c$ depend on the step of the lattice?

40. ($\mathbf{Q}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{M}$) For fixed function T on the boundary the energies $E(T_N)$ are bounded.

41. ($\mathbf{Q}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{M}$) Let K be a square contained in the interior of Q (respectively, a triangle in the interior of Δ, a polygon in the interior of M). Then

$$|T_N(z) - T_N(w)| = \mathrm{O}\left(\ln^{-1/2}\left(1 + |z - w|^{-1}\right)\right)$$

uniformly with respect to any vertices $z, w \in K$ of the lattice Q_N (respectively, Δ_N, M_N).

42. ($\mathbf{Q}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{M}$) Prove that there is a sequence $N_1, N_2, \dots$ such that the sequence $T_{N_k}(x,y)$ converges for each x, y belonging to infinitely many lattices Q_N (respectively, Δ_N, M_N).

Наглядная теория потенциала

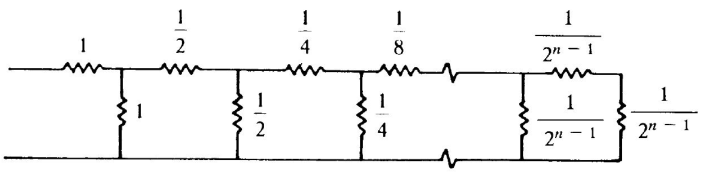
Михаил Скопенков

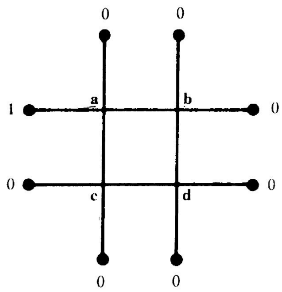
При решении следующих задач можно пользоваться без доказательства любыми теоремами и задачами курса, если приводятся их полные формулировки.

1. Можно ли разрезать квадрат на 3 подобных, но не равных прямоугольника?

2. Человек случайным образом перемещается по графу, изображенному на рисунке справа. Начав свой путь в вершине a, он с вероятностью $1/4$ перемещается в любую из соседних вершин. Дойдя до новой вершины, он опять выбирает направление движения случайным образом. Найдите вероятность того, что он достигнет вершины, помеченной 1, раньше, чем любой из вершин, помеченных 0.

3. Пусть R_n — сопротивление "лестницы" из $2n$ резисторов, изображенной на рисунке слева. Найдите выражение для R_{n+1} через R_n. Каков предел последовательности R_n при неограниченном возрастании числа n?





4. Бумажный цилиндр имеет высоту a и периметр основания b. При каких a и b его боковую поверхность можно разрезать на квадраты, не обязательно равные?

5. Человек случайным образом перемещается по правильной треугольной решетке. Какова вероятность того, что он когда-нибудь вернется в начальную точку?

6. Найти сопротивление между соседними узлами бесконечной треугольной решетки из единичных резисторов.

Результаты сдачи задач в течение семестра

Кирилл Киселев	1.1.2, 1.1.7, 1.2.3A, 1.2.4, 1.2.5(1AD)(2A), 1.2.10, 1.3.1AB, 1.3.2, 1.3.5, 1.4.1–1.4.2, 2.1.4, 2.1.5B, 2.1.6B, 2.1.7–2.1.9, P=C/deg a
Александр Романенков	1.1.1A, 1.1.2–1.1.4, 1.1.6–1.1.7, 1.2.1, 1.3.1AB, 2.1.3, 2.1.5ABC, 2.1.6AB, 2.1.8A, 2.2.5ABCD
Сергей Кузьмичев	1.1.1B, 1.1.2–1.1.5, 1.1.6AC, 1.1.7, 1.2.1–1.2.3, 1.2.4, 1.2.5(1ABCD), 1.2.9A, 2.1.1
Игорь Власов	1.1.2–1.1.4, 1.1.6C, 1.1.7, 1.2.4ABC, 1.2.10, P=C/deg a, 2.1.6AB, 2.1.7, 2.2.5ABCD
Василий Горохов-Апельсинов	1.1.1AC, 1.1.2–1.1.4, 1.1.6C, 1.2.2–1.2.3, 1.2.9A, 1.3.3A, 1.3.4
Дарья Анзон	1.1.1–1.1.7, 1.2.3A, 1.2.4AB, 1.2.5(2A), 1.3.1AB, 2.1.5B, $\exists P$
Иван Черноглазов	1.1.5, 1.1.7, 1.2.3A, 2.1.1–2.1.2, 2.1.6A
Александр Чистяков	1.2.5A, 1.2.2, 1.3.1-1.3.3A
Григорий Головин	1.1.2, 2.1.1, 2.1.3
Илья Герман	1.1.7, 1.1.4

3. Указания и решения

3.1. Случайные блуждания

1 **(A)** Правильность работы программы проверяется следующим образом: разность между "настоящей" и посчитанной вероятностями должна быть примерно пропорциональна числу $\frac{1}{\sqrt{n}}$, где n — число экспериментов.
(B) Ответ смотрите в таблице.

Таблица 2: Вероятности $P_T(x)$ и $P(x)$

x / T	0	1	2	3	4	5
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00
2	0.00	0.00	0.00	0.25	0.50	1.00
3	0.00	0.00	0.13	0.25	0.63	1.00
4	0.00	0.06	0.13	0.38	0.63	1.00
$P(x)$	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00

(C) *Ответ*: $P(x) = x/5$; см последнюю строку в таблице выше.
Доказательство. Рассмотрим случайное блуждание по точкам $0, 1, 2, \ldots, n$. Обозначим за $P(x)$ вероятность дойти из x до N раньше, чем до 0. Рассмотрим получившуюся функцию $P(x)$, определенную в точках $x = 0, 1, 2, \ldots, n$. Она обладает следующими свойствами:

1. $P(0) = 0$ и $P(n) = 1$.
2. $P(x) = \frac{1}{2}P(x-1) + \frac{1}{2}P(x+1)$ для каждого $x = 1, 2, ..., n-1$.

Свойство 1 следует из того, что при достижении точек 0 и n перемещения заканчиваются; для игры на монетки это означает конец игры. Свойство 2 заключается в том, что вероятность попасть домой из внутренней точки x равна среднему арифметическому вероятностей попадания домой из соседних точек. Свойство 2 выводится из следующего утверждения:

Базовое Утверждение. *Пусть E — некоторое событие, F и G — два события, из которых всегда случается ровно одно. Тогда*

$$P(E) = P(F) \cdot P(E \text{ последует за } F) + P(G) \cdot P(E \text{ последует за } G).$$

В нашем случае E="человек дойдет до бара", F="первый раз он пойдет налево" и G="первый раз он пойдет направо". Тогда получаем $P(E) = P(x)$, $P(F) = P(G) = 1/2$, $P(E \text{ последует за } F) = P(x-1)$, $P(E \text{ последует за } G) = P(x+1)$ и свойство 2 доказано.

Из этих двух свойств вытекает, что $P(x)$ представляет собой арифметическую прогрессию $P(x) = x/n$.

2 *Ответ*: $P(x) = x/5$; эта задача эквивалентна задаче 1(C).

3 *Ответ*: $P(x) = \frac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^5 - 1}$.
Указание: Рассуждайте так же, как в решении задачи 1(C). Покажите, что свойства 1–2 надо заменить на такие:

1. $P(0) = 0$ и $P(n) = 1$.
2. $P(x) = qP(x-1) + pP(x+1)$ для каждого $x = 1, 2, ..., n-1$.

Выберите A и B такими, чтобы функция $f(x) = A(q/p)^x + B$ удовлетворяла новым свойствам 1–2.

4 *Ответ*: $\approx 99.995\%$. Точное значение: $1 - \frac{(0.55/0.45)^{20}-1}{(0.55/0.45)^{70}-1}$; смотрите решение задачи 3.

5 *Ответ*: $v(x) = x/5$. *Указание.* Из аксиом 1–2 следует, что функция $v(x)$ будет линейной для этой цепи.

6 **(A)** Пусть M — максимум функции $v(x)$. Тогда если $v(x) = M$ для $x \notin P \cup N$, то это же равенство должно быть выполнено для $v(x-1)$ и $v(x+1)$ так как $v(x)$ — среднее арифметическое $v(x-1)$ и $v(x+1)$. Если $x-1$ оказалась внутренней точкой, применяем то же самое рассуждение и получаем $f(x-2) = M$; продолжая рассуждение, получаем $f(0) = M$. Для минимального значения аналогично.
(B) Положим $h(x) = v(x) - u(x)$. Тогда для любой внутренней точки x имеем:

$$\frac{h(x-1) + h(x+1)}{2} = \frac{v(x-1) + v(x+1)}{2} - \frac{u(x-1) + u(x+1)}{2}$$

и поэтому функция $h(x)$ также удовлетворяет аксиоме 2. Но $h(x) = 0$ при x из $P \cup N$; из принципа максимума получаем, что максимальное и минимальное значения h равны 0. Значит, $h(x) = 0$ и $v(x) = u(x)$.
(C) *Ответ*: $v(x) = x/n$, $C = 1/n$; $C \to 0$ и $v(x) \to 0$ для каждого фиксированного x при $n \to \infty$.
Указание: Легко проверить, что функция $f(x) := x/n$ удовлетворяет аксиомам 1–2. Из единственности (см 6(B)) следует, что $v(x) = x/n$.

7 **Теорема.** *При случайном блуждании по* 1*-мерной решетке вероятность вернуться когда-либо в начальную точку равна* 1.
Доказательство. Пусть P — вероятность вернуться когда-либо в начальную точку. Обозначим P_n вероятность вернуться в начальную точку до попадания в n или $-n$. Предположим, что все эти вероятности существуют. Тогда $P_n \le P \le 1$ для любого n.

Сейчас мы докажем, что $P_n = 1 - 1/n$. После первого "хода" человек попадает в одну из точек 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Если он оказался в точке 1, то из задачи 1(C) получаем, что вероятность вернуться в начало до попадания в точку n равна $1 - 1/n$. Если он оказался в точке -1, рассуждаем аналогично. Применяя Базовое Утверждение из решения задачи 1(C), получаем $P_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$. (Еще можно было заметить, что $P_n = 1 - C$, где $C = 1/n$ — проводимость цепи из задачи 6.)

Так как $1 - 1/n \le P \le 1$ для каждого n, то P равно 1. $\square$

8 *Ответ*: см. рисунок 9 слева.

		1	1	
	1	.823	.787	1
1	.876	.506	.323	0
	1	0	0	

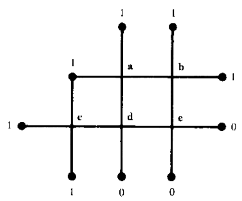


Рис. 9: Вероятности $P(x)$ или потенциалы $v(x)$; см. задачи 8 и 9.

Указание. Схема города представлена на рисунке 9 справа. Вероятности $P(x)$ обозначены за a, b, c, d, и e. Как и в 1-мерном случае, функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2 из определения электрической цепи. Отсюда мы получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a &= (b+d+2)/4; \\ b &= (a+c+2)/4; \\ c &= (d+3)/4; \\ d &= (a+c+e)/4; \\ e &= (b+d)/4. \end{aligned}$$

Ответ получаем, решая эту систему.

Замечание. Нахождение точного решения для двухмерной "задачи Дирихле" — дело сложное; поэтому мы рассмотрим два метода нахождения приближенных решений.

Первый метод использует случайные блуждания. Он называется *методом Монте-Карло*, так как случайные блуждания связаны с вероятностями, а в Монте-Карло находится известные игорные дома, азартные игры в которых тоже связаны с вероятностями. Мы моделируем много случайных блужданий из точки x и находим долю путей, закончившихся в точках E. Из закона больших чисел следует, что полученная оценка будет приближением для "настоящей" вероятности $P(x)$. Этот яркий и простой метод позволяет находить решения, но он не очень эффективен.

Теперь опишем более эффективный *метод релаксации.* Напомним, что мы ищем функцию с заданными значениями на границе у которое значение в любой внутренней точке равно среднему арифметическому значений ее соседей. Возьмем какую-нибудь функцию с подходящими граничными значениями и возьмем некоторую внутреннюю точку. В общем случае значение функции не будет равно среднему арифметическому значений в соседних точках. Тогда попробуем "подогнать": положим новое значение функции в этой точке равным среднему арифметическому значений в соседних точках. Теперь будем по очереди брать остальные внутренние точки и делать с ними ту же операцию. Когда мы пройдем по всем внутренним точкам, функция не будет удовлетворять аксиоме 2, так как после изменения значения функции в одной точке мы могли изменить значения в соседних с ней точках, нарушив равенство. Тем не менее, полученная функция будет "лучше" удовлетворять аксиоме 2, чем та функция, с которой мы начали; повторяя этот процесс (проходя каждый раз по всем внутренним точкам) мы будем получать приближения к решению лучше и лучше.

9 *Ответ*: см. рисунок 9 слева; эта задача эквивалентна задаче 8.

10 *Ответ*: **(A)** 2/5; **(B)** 1/2; **(C)** 2/7; **(D)** 2/5.

Указание. Сведем задачу к задаче 12 при помощи следующего утверждения:

Физическая интерпретация вероятности. *Вероятность того, что случайное блуждание по графу G из вершины a достигнет вершины h до возврата в a, равна*

$$P = C/\,deg\,a,$$

где C — проводимость графа G (все резисторы единичные) между a и h, а $deg\,a$ — число ребер, выходящих из вершины a.

11 **(C)** *Указание.* Функция $v(x)$ однозначно определена на вершинах получившейся цепи. Проверьте, что она удовлетворяет аксиомам 1–2.

12 *Ответ*: **(1A)** 6/5; **(1B)** 2; **(1C)** 6/7; **(1D)** 2.

(2A) 12/7; **(2B)** 12/5; **(2C)** 30/19; **(2D)** 30/11.

(2A) *Указание.* Соединим точки a и b с батарейкой; см. рисунок 4 справа. Потенциалы в точках c и d равны из симметрии; аналогично в точках e и f. Таким образом, наша схема эквивалентна схеме, изображенной на рисунке 10 слева.

Используя формулы для параллельного и последовательного соединения резисторов, эта цепь сводится в к цепи из одного резистора сопротивлением 7/12 ом (см рисунок 10 справа). Таким образом, сопротивление равно 7/12.

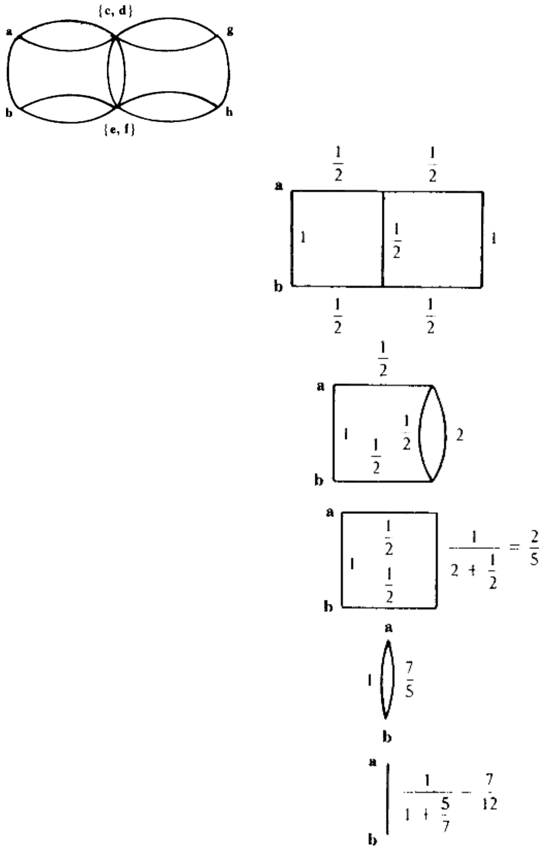


Рис. 10: Упрощение цепи; см решение задачи 12.

13 *Ответ*: 1/7. Решение аналогично решению задачи 10.

14 **(B)** Авторам неизвестно элементарное решение задачи. Красивое решение, использующее дискретное преобразование Фурье, вы можете найти в книге [30].

15 *Указание.* Смотрите задачу **??**.

16 **(B)** *Ответ*: $C \to 0$ при $n \to \infty$.

Указание. Применим закон монотонности: объединим вместе точки, расположенные на квадратах, как показано на рисунке 11 сверху. Полученная цепь эквивалентна цепи на рисунке 11 в центре. Так как можно заменить n параллельных резисторов в 1 ом на один резистор в $1/n$ ом, цепь эквивалентна цепи на рисунке 11 снизу. Проводимость этой цепи равна

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{8k-4}}.$$

Это число стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Так как проводимость старой цепи не больше, она тоже стремится к нулю.

17 *Указание.* Пусть P — вероятность того, что при случайном блуждании по 2-мерной решетке мы вернемся в начальную точку. Обозначим за P_n вероятность того, что

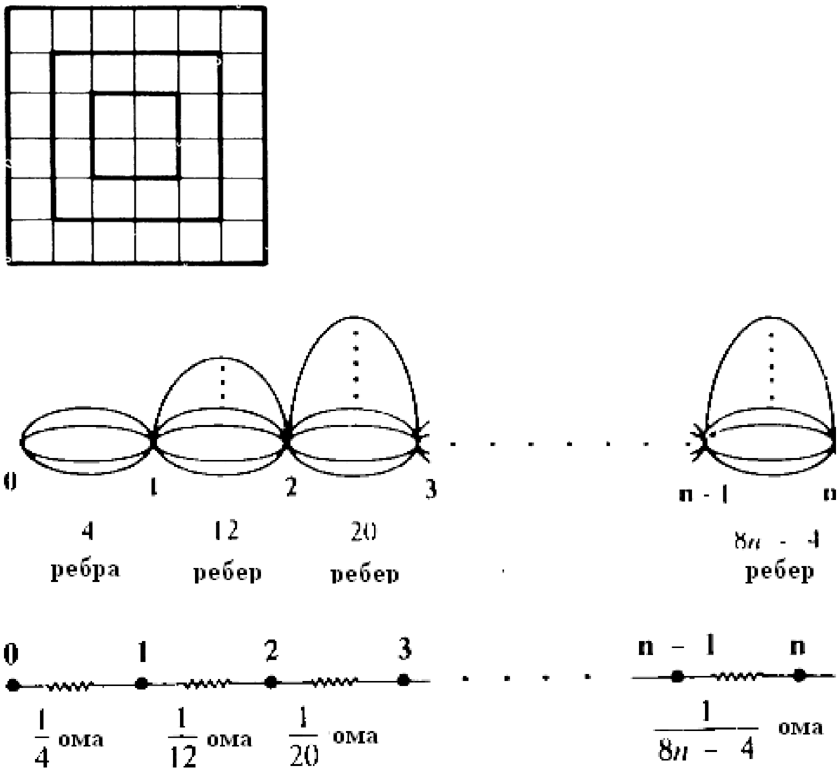


Рис. 11: Объединение в квадратной цепи и эквивалентная цепь; см решение задачи 16.

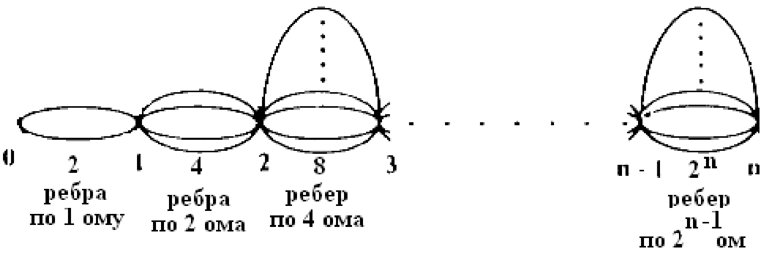


Рис. 12: Подсчет сопротивления дерева; см решение задачи 19.

случайное блуждание вернется в начальную точку до достижения граничных точек квадрата $2n \times 2n$ с центром в начальной точке. Предположим, что все эти вероятности существуют. Ясно, что $P_n \leq P \leq 1$ для каждого n. Из физической интерпретации вероятности получаем, что $P_n = 1 - C/4$, где C — эффективное сопротивление между центром и границей квадрата $2n \times 2n$. Из решения задачи 16(B) следует, что C стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Поэтому $P_n \to 1$ при $n \to \infty$ и P равно 1. □

18 *Указание.* Докажите по индукции, что сопротивление бинарного дерева глубины n из единичных резисторов равно $1 - \frac{1}{2^n}$.

19 *Указание.* Потенциалы в точках, расположенных на одинаковом расстоянии от корня дерева, равны из симметрии. Объединив такие точки в бинарном дереве, получим цепь, изображенную на рисунке 12. Ее сопротивление равно $\frac{1}{2} \cdot n = \frac{n}{2}$. Для троичного дерева аналогично получаем $R = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n}$. Отсюда $R = 1 - \frac{2^n}{3^n}$.

20 *Указание.* Двоичное дерево глубины 3 вырезать не сложно. Покажем, что двоичное дерево глубины 2010 вырезать нельзя. Если его удалось вырезать, то все его вершины расположены на расстоянии не более 2010 от корня; отсюда получаем, что дерево находится в кубе со стороной $2 \cdot 2010 + 1$. Поэтому число его вершин не превосходит $4021^3 \leq 2^{36}$. С другой стороны, число его вершин равно $2^{2011} - 1$. Полученное противоречие завершает доказательство. Задача о вырезании модифицированного дерева решается не просто.

21 *Указание.* Двоичное дерево вырезать нельзя; рассуждайте аналогично решению задачи 20, пользуясь тем, что более двух вершин склеиться не могут. Модифицированное двоичное дерево можно вырезать из плоскости (см рисунок 13), а троичное из пространства аналогичным образом (см рисунок 14). Доказательство проводится индукцией по глубине дерева.

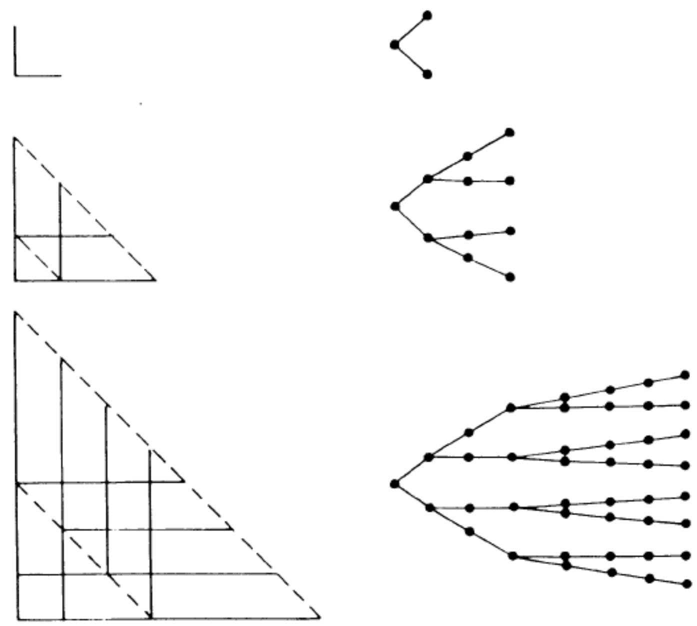


Рис. 13: Вырезание двоичного дерева с пересечениями из плоскости; см решение задачи 21.

22 *Указание.* Для любого $n = 2^i - 1$ рассмотрим множество вершин (x, y, z), где $|x| + |y| + |z| \le n$. Пусть R_i — сопротивление между началом координат и границей такой фигуры. Как известно из задачи 21, из такой части решетки можно вырезать модифицированное троичное дерево глубины i с пересечениями ребер на равном расстоянии от корня. Легко заметить, что сопротивление дерева с такими пересечениями равно сопротивлению такого же дерева без пересечений. Как известно из задачи 19, сопротивления модифицированных троичных деревьев не превосходят 1. Поэтому не превосходят 1 и сопротивления вырезаемых деревьев с пересечениями. Из закона монотонности получаем, что $R_i \le 1$. Значит, при подключении батарейки в 1 вольт ток будет не меньше 1. Следовательно, потенциалы в вершинах, соседних с началом координат будут не больше $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Они равны вероятности возврата в начало координат до попадания на границу. Переходя к пределу, получаем требуемое.

3.2. Разрезания прямоугольника

?? Занумеруем квадраты (полки) как показано на рис. 15. Можно считать, что вертикальная сторона большого прямоугольника (шкафа) равна 1. Горизонтальную сторону большого прямоугольника обозначим через x. Тогда искомое отношение сторон равно $R = 1/x$. Сторону квадрата номер k обозначим через x_k.

К левой стороне большого прямоугольника примыкают квадраты 2, 3 и 8, откуда $x = x_2 + x_3 + x_8$. К правой стороне квадрата 3 примыкают квадраты 1 и 4: $x_3 = x_1 + x_4$.

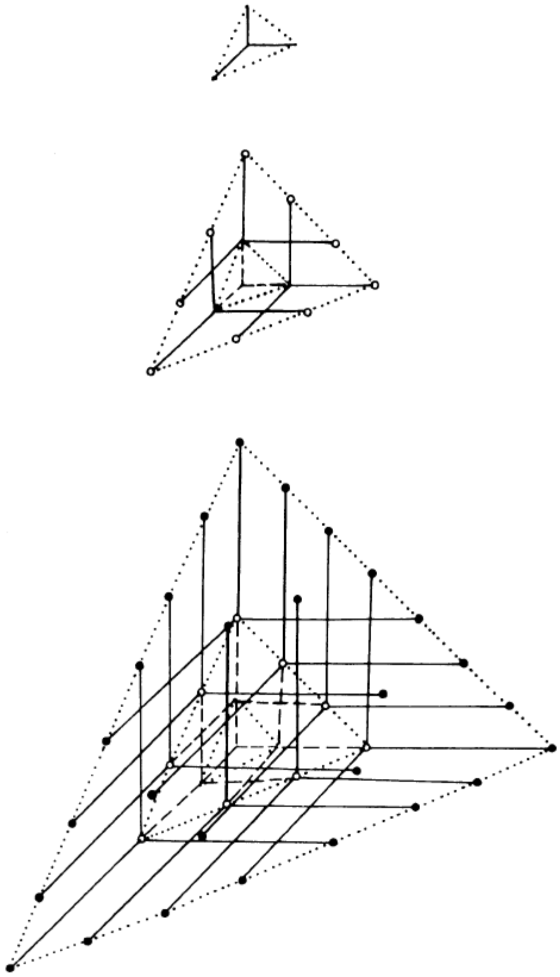


Рис. 14: Вырезание троичного дерева с пересечениями из пространства; см решение задачи 21.

Аналогично, $x_6 + x_8 = x_7$, $x_1 + x_2 = x_5 + x_6$, $x_4 + x_5 = x_9$. Сформулируем наше наблюдение в общем виде:

Условие вертикальной стыковки. *Для каждого вертикального разреза сумма вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу слева, равна сумме вертикальных сторон прямоугольников, примыкающих справа. Вертикальная сторона большого прямоугольника равна сумме вертикальных сторон примыкающих к ней прямоугольников.*

Глядя на схему разрезания, можно написать аналогичные уравнения, описывающие примыкание квадратов друг к другу горизонтальными сторонами:

Условие горизонтальной стыковки. *Для каждого горизонтального разреза сумма горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих к разрезу сверху, равна сумме горизонтальных сторон прямоугольников, примыкающих снизу. Горизонтальная сторона большого прямоугольника равна сумме горизонтальных сторон примыкающих к ней прямоугольников.*

Из этого условия: $1 = x_3 + x_4 + x_9$, $x_4 = x_1 + x_5$, $x_1 + x_3 = x_2$, $x_5 + x_9 = x_6 + x_7$, $x_2 + x_6 = x_8$.

Итак, нахождение отношения сторон прямоугольника сводится к решению системы уравнений, в нашем случае:

$$x = x_2 + x_3 + x_8,\quad x_3 = x_1 + x_4,\quad x_6 + x_8 = x_7,\quad x_1 + x_2 = x_5 + x_6,\quad x_4 + x_5 = x_9,$$
$$x_3 + x_4 + x_9 = 1,\quad x_4 = x_1 + x_5,\quad x_1 + x_3 = x_2,\quad x_5 + x_9 = x_6 + x_7,\quad x_2 + x_6 = x_8.$$

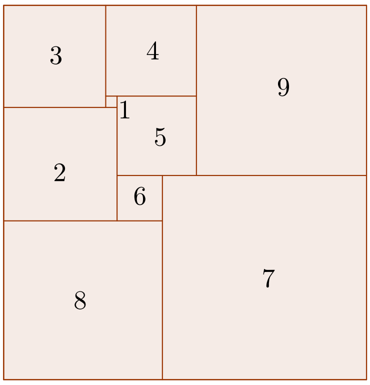


Рис. 15: Разрезание прямоугольника на 9 неравных квадратов

Проиллюстрируем известный алгоритм Гаусса–Жордана решения системы линейных уравнений на нашем примере. Наша цель — преобразовать систему так, чтобы каждая неизвестная участвовала ровно в одном уравнении. Для неизвестной x это уже выполнено — она содержится только в первом уравнении.

Перейдем ко второму уравнению. В нем неизвестная x_3 выражена через x_1 и x_4. Подставим это выражение в другие уравнения системы, содержащие неизвестную x_3 — в первое, шестое и восьмое. Получим систему:

$$\begin{aligned} &x = x_2 + x_1 + x_4 + x_8, \quad x_3 = x_1 + x_4, \quad x_6 + x_8 = x_7, \quad x_1 + x_2 = x_5 + x_6, \quad x_4 + x_5 = x_9, \\ &x_1 + 2x_4 + x_9 = 1, \quad x_4 = x_1 + x_5, \quad 2x_1 + x_4 = x_2, \quad x_5 + x_9 = x_6 + x_7, \quad x_2 + x_6 = x_8. \end{aligned}$$

Она равносильна исходной. Но теперь неизвестная x_3 участвует только во втором уравнении.

Перейдем к третьему уравнению. Подставляя выражение $x_7 = x_6 + x_8$ в девятое уравнение, получим систему, содержащую x_7 только в третьем уравнении:

$$\begin{aligned} &x = x_2 + x_1 + x_4 + x_8, \quad x_3 = x_1 + x_4, \quad x_6 + x_8 = x_7, \quad x_1 + x_2 = x_5 + x_6, \quad x_4 + x_5 = x_9, \\ &x_1 + 2x_4 + x_9 = 1, \quad x_4 = x_1 + x_5, \quad 2x_1 + x_4 = x_2, \quad x_5 + x_9 = 2x_6 + x_8, \quad x_2 + x_6 = x_8. \end{aligned}$$

Будем продолжать таким же образом дальше. Каждый раз будем выражать одну из неизвестных в очередном уравнении через остальные. Будем подставлять полученное выражение в другие уравнения. В полученной системе выбранная неизвестная будет присутствовать только в одном уравнении. После этого процесс продолжается[1].

В итоге мы получим систему “уравнений” (проверьте!):

$$\begin{aligned} x = 33/32, \quad x_3 = 9/32, \quad x_7 = 1/2, \quad x_1 = 1/32, \quad x_4 = 1/4, \\ x_9 = 15/32, \quad x_5 = 7/32, \quad x_2 = 5/16, \quad x_8 = 7/16, \quad x_6 = 1/8. \end{aligned}$$

Тем самым решение исходной системы найдено. Итак, в примере 3 отношение сторон большого прямоугольника равно $R = 1/x = 32/33$. Значения неизвестных $x_1, \dots, x_9$ — это стороны квадратов. Тем самым мы получили пример разрезания прямоугольника на попарно различные квадраты.

?? См., например, статью [29].

?? (B) Приведем решение, использующее случайные блуждания. Другие решения намечены в пункте (A) и в задаче **??**.

[1] Вообще говоря, возможно, что после нашей подстановки все неизвестные в некотором уравнении сократятся, и оно примет вид $0 = 0$. В этом случае выбросим его из системы. Если же в результате подстановки получилось уравнение, в котором правая часть — ненулевое число, а все коэффициенты в левой части нулевые, то это означает, что исходная система не имеет решений.

Рассмотрим случайное блуждание по электрической цепи. Пусть $P_T(x)$ — вероятность того, что, стартуя из вершины x и делая T шагов, мы достигнем положительного полюса батареи раньше, чем отрицательного. Ясно, что при фиксированном x последовательность $P_T(x)$ возрастает, значит, имеет предел $P(x)$. Функция $P(x)$ удовлетворяет аксиомам 1–2.

Замечание. Существование и единственность решения системы Кирхгофа — фундаментальные факты. Например, из единственности решения следует теорема Дена о том, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон нельзя разрезать на квадраты. Из существования решения (в непрерывном случае) следует теорема Римана о конформном отображении [**?**].

Благодарности

Задачи в основном заимствованы из подборки К. Кохася, а также статей [22, 3].

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, Цепные дроби, МЦНМО, Москва, 2001.

[2] R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone, and W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math. J. **7** (1940), 312–340.

[3] S. Dorichenko, O. Malinovskaya, M. Skopenkov, A square from similar rectangles, in preparation (in Russian). С. Дориченко, О. Малиновская, М. Скопенков, Квадрат из подобных прямоугольников, препринт, http://arxiv.org/abs/1305.2598.

[4] M. Gardner, Squaring the square. In: The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions, University of Chicago Press, 1987, 256 p. М. Гарднер, Квадрирование квадрата. В: Математические головоломки и развлечения, М.:Мир, 1999.

[5] C. Freiling and D. Rinne, Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. **1** (1994), 547–558.

[6] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, государсвтенное издательство физико-математической литературы, Москва,(1960)

[7] R. Kenyon, Tilings and discrete Dirichlet problems, Israel J. Math. **105:1** (1998), 61–84.

[8] M. Laczkovich and G. Szekeres, Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geom. **13** (1995), 569–572.

[9] Jiří Matoušek, Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, Amer. Math. Soc., 2010, 182 p.

[10] V. G. Pokrovskii, Slicings of n-dimensional parallelepipeds, Math. Notes **33:2** (1983), 137–140. Matematicheskie Zametki **33:2** (1983), 273–280 (in Russian).

[11] M. Prasolov and M. Skopenkov, Tilings by rectangles and alternating current, *J. Combin. Theory A* **118:3** (2011), 920–937, http://arxiv.org/abs/1002.1356.

[12] M. Prasolov, M. Skopenkov and B. Frenkin, Invariants of polygons, 19-th summer conference International mathematical Tournament of towns, Belarus, Minsk, 2007. M.

Прасолов, М. Скопенков и Б. Френкин, Инварианты многоугольников, 19-я летняя конференция международного математического Турнира городов, Беларусь, Минск, 2007. http://www.turgor.ru/lktg/2007/1/index.php

[13] M. Skopenkov, M. Prasolov, S. Dorichenko, Dissections of a metal rectangle, Kvant 3 (2011), 10-16 (in Russian). М. Скопенков, М. Прасолов, С. Дориченко, Разрезания металлического прямоугольниа, Квант 3 (2011), 10-16.http://arxiv.org/abs/1011.3180

[14] M. Skopenkov, V. Smykalov, A. Ustinov, Random walks and electric networks, Mat. Prosv. 3rd ser. 16 (2012), 25-47 (in Russian). М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов, Случайные блуждания и электрические цепи, Мат. Просв., 3-я серия 16 (2012), 25-47. http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html

[15] Z. Su and R. Ding, Tilings of orthogonal polygons with similar rectangles or triangles, J. Appl. Math. Comp. **17:1** (2005), 343–350.

[16] B. Szegedy, Tilings of the square with similar right triangles, Combinatorica **21:1** (2001), 139–144.

[17] I.M. Yaglom, How to Dissect a Square?, Math. Bibl., Nauka, Moscow, 1968, 112 p. (in Russian). И.М. Яглом, Как разрезать квадрат? Мат. Библ., М.: Наука, 1968, 112 стр. http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/yaglom/square.htm

[18] S. Wagon, Fourteen proofs of a result about tiling a rectangle, Amer. Math. Monthly 94:7 (1987).

[19] А. Варламов, Правила Кирхгофа, *Квант* 1 (1985).

[20] М. Гарднер, Квадрирование квадрата. В: Математические головоломки и развлечения, 2-е изд., испр. и доп. - Пер. с англ.- М.: Мир, 1999 - 447с.

[21] О. Ляшко, Почему не уменьшится сопротивление, *Квант* 1 (1985).

[22] М. Скопенков, М. Прасолов, С. Дориченко, Разрезания металлического прямоугольника, *Квант* 3 (2011), 10–16. http://arxiv.org/abs/1011.3180.

[23] М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов, Случайные блуждания и электрические цепи, Математическое Просвещение 3-я серия, 16 (2012), 25-47.

[24] М. Скопенков, А. Устинов, Сопротивление между узлами решетки, препринт.

[25] И. Яглом, Как разрезать квадрат, Математическая библиотечка, М.: Наука 1968, 112 стр. http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/yaglom/square.htm.

[26] P. G. Doyle and J. L. Snell, Random walks and electric networks, Mathematical Association of America, 1984, http://arxiv.org/abs/math.PR/0001057.

[27] C. Freiling and D. Rinne, Tiling a square with similar rectangles, Math. Res. Lett. **1** (1994), 547–558.

[28] M. Laczkovich and G. Szekeres, Tiling of the square with similar rectangles, Discr. Comp. Geom. **13** (1995), 569–572.

[29] M. Prasolov and M. Skopenkov, Tilings by rectangles and alternating current, *J. Combin. Theory A* **118:3** (2011), 920–937, http://arxiv.org/abs/1002.1356.

[30] F. Spitzer, Principles of random walks, Springer–Verlag, 1976.